Квантование в фазовом пространстве и построение операторов наблюдаемых

еще один подход к квантованию

Е.М. Бениаминов

Российский государственный гуманитарный университет,
кафедра математики, логики и интеллектуальных систем

2015

О чем доклад?

Вводятся некоторые предположения о процессе наблюдения квантовых явлений в фазовом пространстве, включая:

- введение параметров внутренних состояний,
- определение действия группы движения в расширенном пространстве,
- усреднения наблюдений за счет малых случайных (диффузионных) движений объекта наблюдения.

Исходя из этих предположений показывается, что значения наблюдений классической наблюдаемой величины (функции от координат и импульсов) соответствуют спектру некоторого линейного оператора. В работе найдено выражение этого оператора для любой наблюдаемой и показывается, что он близок к стандартному оператору квантовой наблюдаемой.

Фазовое пространство

"Только теория говорит нам,
что же мы наблюдаем в эксперименте"
А.Эйнштейн

Для простоты будем рассматривать плоский случай Пусть R^{2n} — фазовое пространство, элементы которого будут обозначаться через (q,p), где $q=(q_1,...,q_n)$ — координаты конфигурационного пространства, представляющего собой n-мерное евклидово пространство R^n, а $p=(p_1,...,p_n)$ — координаты импульса. В классической механике координаты и импульсы связаны внешней дифференциальной формой $\Omega=\sum_{i=1}^{n} dq_i \wedge dp_i$.

Канонические преобразования

Каноническими преобразованиями g фазового пространства R^{2n} называются гладкие взаимно однозначные отображения $g : R^{2n} \to R^{2n}$, сохраняющие форму Ω. Через S обозначим группу всех канонических преобразований фазового пространства R^{2n}. Динамика механической системы задается однопараметрической подгруппой канонических преобразований g_t.

Каждая однопараметрическая подгруппа канонических преобразований g_t является интегралом гамильтонова векторного поля $\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i}$ (здесь по повторяющимся индексам предполагается суммирование) для некоторой функции $H(p, q)$.

Наблюдаемые в классической механике

С наблюдаемыми механической системы связываются действительные функции $f(q,p)$ на фазовом пространстве, а с состояниями — неотрицательные распределения $\rho(q,p)dqdp$. Средним значением наблюдаемой f в состоянии ρ называется число

$$\int_{R^{2n}} f(q,p)\rho(q,p)dqdp,$$

которое обозначается через $\langle f, \rho \rangle$.

Положения о квантовых наблюдениях i1, i2

Будем исходить из следующих предположений:

i1). Фазовое пространство системы R^{2n} расширяется до пространства $E = R^{2n} \times F$, где F — некоторое многообразие внутренних состояний. Через $\pi : E \to R^{2n}$ обозначается отображение проекции.

i2). Действие группы канонических преобразований S поднимается с R^{2n} на E, то есть существуют группа гладких преобразований S' пространства E вместе с эпиморфизмом $\alpha : S' \to S$ такие, что для любого $g' \in S'$ коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{g'} & E \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ R^{2n} & \xrightarrow{\alpha(g')} & R^{2n}. \end{array}$$

Положения о квантовых наблюдениях i3, i4

i3). Наблюдаемые квантовой системы, так же как и классической, задаются функциями $f(q,p)$ на фазовом пространстве R^{2n}.

Пусть $\rho(q,p,\xi)dqdpd\xi$ — неотрицательное распределение на E, заданное плотностью распределения $\rho(q,p,\xi)$, где $\xi \in F$, и мерой $dqdpd\xi$ на E, которая будет предполагаться инвариантной относительно действия группы S'. Функция $\rho(q,p,\xi)$ может быть представлена в виде $\rho(q,p,\xi) = \varphi^2(q,p,\xi)$, где $\varphi(q,p,\xi)$ — также некоторая функция на E, обладающая свойством $\int_F \varphi(q,p,\xi)d\xi = 0$.

Положения о квантовых наблюдениях i4, i5

Обозначим через $\tilde{\rho}(q,p,\xi)=\tilde{\varphi}^2(q,p,\xi)$ некоторую усредненную плотность распределения, полученную из $\rho(q,p,\xi)$ за счет малых флуктуаций системы на E .

i4). В квантовой системе при измерениях реализуются лишь усредненные плотности распределения вида $\tilde{\rho}(q,p,\xi)=\tilde{\varphi}^2(q,p,\xi)$. Соответствие $\varphi\mapsto\tilde{\varphi}$ является линейным проектором, вид которого будет дан позже.

i5). В экспериментах с квантовой системой получают средние значения наблюдаемых $f(q,p)$, равные

$$\langle f,\tilde{\rho}\rangle=\int_E f(q,p)\tilde{\rho}(q,p,\xi)dqdpd\xi=\int_E f\tilde{\varphi}^2dqdpd\xi,$$

где $\tilde{\rho}(q,p,\xi)$ — усредненные плотности распределения на E.

Основной результат

Рассмотрим линейное пространство усредненных функций вида $\tilde{\varphi}(q,p,\xi)$ на E, пополненное до гильбертова пространства $\mathbf{H}_{\tilde{\varphi}}$ относительно стандартного скалярного произведения $\langle \tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2 \rangle = \int_E \tilde{\varphi}_1 \tilde{\varphi}_2 dqdpd\xi$. Сопоставим функции $f(q,p)$ линейный оператор A_f в пространстве $\mathbf{H}_{\tilde{\varphi}}$, который задается соотношением:

$$\langle \tilde{\varphi}, A_f \tilde{\varphi} \rangle = \langle f, \tilde{\varphi}^2 \rangle.$$

Основным результатом данной работы является доказательство того, что при некоторых предположениях о группе S' и ее действии на E, операторы A_f приближенно (с точностью до членов порядка h, где h — постоянная Планка) совпадают с операторами квантовых наблюдаемых, принятыми в стандартном определении квантовой механики.

Расширение группы канонических преобразований

В качестве группы S', действующей на $E = R^{2n} \times F$ рассматривается нетривиальное центральное расширение группы канонических преобразований S фазового пространства R^{2n} с помощью одномерной группы вращений $T = R/hZ$, где R — группа вещественных чисел, Z — подгруппа целых чисел, а h — некоторое число. То есть группа S' включается в точную последовательность групп

$$1 \longrightarrow T \longrightarrow S' \longrightarrow S \longrightarrow 1,$$

точная последовательность алгебр Ли которых имеет вид

$$0 \longrightarrow R \longrightarrow \mathcal{S}' \longrightarrow \mathcal{S} \longrightarrow 1.$$

Расширение алгебр Ли, соответствующее расширению группы канонических преобразований

Точная последовательность алгебр Ли имеет вид

$$0 \longrightarrow R \longrightarrow \mathcal{S}' \longrightarrow \mathcal{S} \longrightarrow 1,$$

где $\mathcal{S}$ — алгебра Ли интегрируемых гамильтоновых векторных полей на R^{2n}, и $\mathcal{S}'$ — алгебра Пуассона [10] функций $H(p,q)$ на R^{2n}, которые задают интегрируемые гамильтоновы векторные поля вида $\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i}$ (здесь по повторяющимся индексам предполагается суммирование).

Определение эквивалентности расширенных фазовых пространств

Два расслоения $E = R^{2n} \times F$ и $E' = R^{2n} \times F'$ над R^{2n}, на которых действует группа S' согласованно с действием группы S на R^{2n}, называются эквивалентными, если найдется гладкое взаимно однозначное отображение расслоений $E \to E'$ над R^{2n}, согласованное с действием группы $S.'$
Имеется теорема о классификации S' — расслоений над R^{2n} с точностью до эквивалентности. Для формулировки этой теоремы нужно несколько подробнее рассмотреть структуру слоя в расслоении E.
Обозначим через S_0 подгруппу всех канонических преобразований, оставляющих точку начала координат $(0,0) \in R^{2n}$ неподвижной, а через S_0' подгруппу в S', равную $\alpha^{-1}(S_0)$.

Теорема эквивалентности расширенных фазовых пространств

Из анализа алгебры Ли группы S_0' следует, что $S' = T \oplus S_0$. Так как подгруппа $S_0' \subset S'$ действует на E и переводит слой F над точкой $(0,0)$ в себя, то, тем самым, определено действие группы в слое F. В частности, в слое F действует однопараметрическая группа $T \subset S_0'$.

Т е о р е м а 1. *Расслоение $E = R^{2n} \times F$ с непрерывным гладким действием на нем группы S', которая действует согласованно с действие группы S на R^{2n}, однозначно с точностью до эквивалентности S'-расслоений определяется S_0'-пространством F.*

Действие алгебры Пуассона на расширенном фазовом пространстве и векторные поля

Действие группы S' на E гладкими преобразованиями определяет стандартным образом сопоставление $H \mapsto \eta_H$: каждому элементу $H \in \mathcal{S}'$ алгебры Ли этой группы — векторное поле η_H на E. Поле η_H строится как производная действия на E однопараметрической подгруппы G_t^H, определенной элементом H алгебр Ли $\mathcal{S}'$, по параметру t, при $t = 0$. Обозначим через χ_1, векторное поле на F, соответствующее действию однопараметрической группы T_t на E, которое также определяется как производная действия одномерной группы вращений $T = T_t$ по параметру t при значении параметра, равным нулю.

Теорема о действии группы Пуассона на расширенном фазовом пространстве

Т е о р е м а 2. *В любом S' - расслоении $E = R^{2n} \times F$ можно так выбрать координаты, что векторные поля , сопоставляемые линейным функциям от q и p вида $H = c + \sum_{i=1}^{n}(x_i p_i - y_i q_i)$ задаются следующим выражением:*

$$\eta_H = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i \frac{\partial}{\partial q_i} + y_i \frac{\partial}{\partial p_i}\right) + \left(c - \sum_{i=1}^{n} y_i q_i\right)\chi_1.$$

В эквивалентной интегральной форме это означает, что для произвольной функции $\varphi(q, p, \xi)$ на E действие однопараметрических групп G_t^H для указанных выше $H \in \mathcal{S}'$ в рассматриваемой тривиализации задается выражением:

$$G_t^H \varphi(q, p, \xi) = \varphi(q + tx, p + ty, T_{t(c-\langle y,q\rangle)}(\xi)).$$

Группа Вейля - Гейзенберга

Для сокращения последующих записей введем обозначение $W_t^{x,y} = G_t^H$, где $H = \langle xp \rangle - \langle yq \rangle$. Однопараметрические подгруппы $W_t^{x,y}$ действуют на функции $\varphi(q,p,\xi)$ в соответствии с предыдущей формулой. Обозначим через W подгруппу в S', порожденную однопараметрическими подгруппами $W_t^{x,y}$ для $(x,y) \in R^{2n}$. Очевидно, что подгруппа W равна прообразу $\alpha^{-1}(R^{2n})$ относительно гомоморфизма $\alpha : S' \to S$, где R^{2n} — группа параллельных переносов на пространстве R^{2n}, рассматриваемая как подгруппа S. Группа W обычно называется группой Вейля-Гейзенберга.

Предположения об операция усреднения

Будем исходить из того, что усреднение $\varphi \mapsto \tilde{\varphi}$, о котором говорилось ранее, связано с броуновским движением на S'-расслоении, которое вызывается случайными малыми смещениями объекта наблюдения относительно системы координат.
Этот процесс действует малыми сдвигами на Δq_i и Δp_i с интенсивностями сдвигов a_i и b_i по координатам q_i и импульсам p_i пространства R^{2n}, а на всем расслоении E в соответствии с действием однопараметрических подгрупп $W_t^{\Delta q, \Delta p}$, при $t = 1$.
Сдвиги по различным направлениям предполагаются слабо зависимыми между собой.

Теорема об усреднении

Т е о р е м а 3. *Пусть операция усреднения удовлетворяет сделанным ранее предположениям. Тогда функция на расширенном фазовом пространстве* $\varphi(q,p,\xi)$, *удовлетворяющая условию* $\int_0^h \varphi(q,p,T_t(\xi))dt = 0$, *за время* τ *порядка* $h/(2\pi ab)$ *экспоненциально стремится к функции* $\tilde{\varphi}(q,p,\xi)$. *Эта усредненная функция имеет вид:*

$$\tilde{\varphi}(q,p,\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2}{h^3}\right)^{\frac{n}{4}}\left(\frac{b_1 \ldots b_n}{a_1 \ldots a_n}\right)^{\frac{1}{4}}\int_{R^n}\exp\left(-\frac{\pi}{h}\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{a_i}(q_i - x_i)^2\right)\times$$
$$\times\left(\psi(x,\xi)\exp\left(-j\frac{2\pi\langle p,x\rangle}{h}\right) + \psi^*(x,\xi)\exp\left(j\frac{2\pi\langle p,x\rangle}{h}\right)\right)dx. \quad (1)$$

В последней формуле через j *обозначена мнимая единица, через* $*$ *— операция комплексного сопряжения.*

Теорема об усреднении (продолжение 1)

При этом, $\psi(x,\xi)$ — комплекснозначная функция на $R^n \times F$, обладающая свойством:

$$\psi(x, T_t(\xi)) = \psi(x,\xi)\exp\left(-j\frac{2\pi}{h}t\right). \tag{2}$$

Причем функция $\psi(x,\xi)$ получается из функции $\varphi(q,p,\xi)$ по следующей формуле:

$$\psi(x,\xi) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{h}\right)\left(\frac{2}{h^3}\right)^{\frac{n}{4}}\left(\frac{b_1\dots b_n}{a_1\dots a_n}\right)^{\frac{1}{4}}\int_0^h\int_{R^{2n}}\varphi\left(q,p,T_t(\xi)\right)\exp\left(j\frac{2\pi t}{h}\right)\times$$
$$\times\exp\left(-\frac{\pi}{h}\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{a_i}\left(q_i-x_i\right)^2\right)\exp\left(j\frac{2\pi\langle p,x\rangle}{h}\right)dqdpdt. \tag{3}$$

Теорема об усреднении (продолжение 2)

Кроме того, если $\psi(x,\xi)$ — произвольная комплекснозначная функция, удовлетворяющая условию (2), то композиция отображений $\psi \mapsto \tilde{\varphi}$ и $\tilde{\varphi} \mapsto \psi$, заданных соответственно формулами (1) и (3), является тождественным сопоставлением $\psi \mapsto \psi$.
Отсюда следует, что операция усреднения $\varphi \mapsto \tilde{\varphi}$ задается линейным оператором — проектором, а линейное отображение $\tilde{\varphi} \mapsto \psi$ является взаимнооднозначным (биекцией).

Гильбертово пространство усредненных функций на расширенном фазовом пространстве

Рассмотрим гильбертово пространство $\mathbf{H}_{\tilde{\varphi}}$ действительных функций $\tilde{\varphi}(q,p,\xi)$ на $E = R^{2n} \times F$ вида (3) со стандартным скалярным произведением $\langle \tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2 \rangle_{H\tilde{\varphi}} = \int_E \tilde{\varphi}_1 \tilde{\varphi}_2 dqdpd\xi$. Через $\mathbf{H}_\psi$ обозначим гильбертово пространство комплекснозначных функций $\psi(x,\xi)$ на $R^n \times F$, удовлетворяющих условию (2), с произведением $\langle \psi_1, \psi_2 \rangle_{H\psi} = Re \int_{R^n \times F} \psi_1(x,\xi)\psi_2^*(x,\xi)dxd\xi$, где Re — операция выделения действительной части у комплексного числа.

Утверждение. *Сопоставление $\psi \mapsto \tilde{\varphi}$, заданное формулой (1), представляет собой изоморфизм гильбертовых пространств $\mathbf{H}_\psi$ и $\mathbf{H}_{\tilde{\varphi}}$.*

Вид оператора наблюдаемой

Оператор A_f сопоставляется наблюдаемой $f(q,p)$ и по определению задается следующим выражением:

$$\langle f, \tilde{\rho} \rangle_{H\tilde{\varphi}} = \int_E f(q,p)\tilde{\varphi}^2(q,p,\xi)dqdpd\xi. \qquad (4)$$

Так как пространства $\mathbf{H}_{\tilde{\varphi}}$ и $\mathbf{H}_{\psi}$ согласно утверждению изоморфны, то мы можем оценивать оператор A_f (точнее тот оператор, в который он переходит при заданном изоморфизме) в пространстве $\mathbf{H}_{\psi}$.

Вид оператора наблюдаемой в пространстве $\mathbf{H}_\psi$

Отсюда следует, что ядро оператора A_f в пространстве $\mathbf{H}_\psi$ имеет вид:

$$A_f(x,x') = \left(\frac{2}{h^3}\right)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{b_1 \ldots b_n}{a_1 \ldots a_n}\right)^{\frac{1}{2}} \int\limits_{R^{2n}} f(q,p) \times$$
$$\times \exp\Big(-\frac{\pi}{h}\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{a_i}\left((q_i - x_i')^2 + (q_i - x_i)^2\right)\Big)$$
$$\times \exp\left(-j\frac{2\pi\langle p, x' - x\rangle}{h}\right) dqdp. \qquad (5)$$

Представление оператора наблюдаемой

В результате, после преобразований получим:

$$\begin{aligned} A_f(x,x') &= \frac{1}{h^n}\int \hat{f}\left(\frac{2\pi(x-x')}{h}, v\right)\exp\left(-\frac{h}{8\pi}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{b_i}v_i^2+\right.\right. \\ &\left.\left.+\frac{b_i}{a_i}\left(\frac{2\pi(x_i-x_i')}{h}\right)^2\right)\right)\exp\left(-j\left\langle\frac{x+x'}{2}, v\right\rangle\right)dv \\ &= \frac{1}{h^n}\int_{R^n}\tilde{f}_h\left(\frac{2\pi(x-x')}{h}, v\right)\exp\left(-j\left\langle\frac{x+x'}{2}, v\right\rangle\right)dv, \end{aligned}$$

где $\hat{f}(u,v)$ — преобразование Фурье функции $f(q,p)$,

$$\tilde{f}_h(u,v) = \hat{f}(u,v)\exp\left(-\frac{h}{8\pi}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{b_i}v_i^2+\frac{b_i}{a_i}u_i^2\right)\right).$$

Приближенное представление оператора наблюдаемой

Если вместо функции $\tilde{f}_h(u, v)$ взять ее разложение в ряд Тейлора по h до n-го члена ряда, то мы получим соответствующее асимптотическое представление оператора A_f. В частности, нулевой член разложения дает следующую асимптотику:

$$A_f(x, x') = \frac{1}{h^n} \int_{R^n} \hat{f}\left(\frac{2\pi(x - x')}{h}, v\right) \exp\left(-j\left\langle\frac{x + x'}{2}, v\right\rangle\right) dv.$$

Полученное выражение совпадает с выражением для оператора наблюдаемой в квантовой механике (см. формулу (14) в [12] , в которой через h обозначена величина $h/(2\pi)$).

Основная теорема

Т е о р е м а 4. *Пусть* A_f *— линейный оператор в гильбертовом пространстве* $\mathbf{H}_\psi$*, который строится на основании предположений i1-i5, о процессе квантового наблюдения по классической наблюдаемой* $f(q,p)$*. Тогда* A_f *асимптотически приближается по* h *к обычному (принятому в квантовой механике) оператору квантовой наблюдаемой в координатном представлении.*

Если требуется более точная оценка оператора A_f, то можно использовать большее число членов ряда Тейлора в разложении функции $\tilde{f}_h(u,v)$ по h.

Точные вычисления оператора наблюдаемой

Для некоторых функций $f(q, p)$ оператор A_f в пространстве $\mathbf{H}_\psi$, заданный интегралом (7) вычисляется точно.

Так, используя стандартные формулы для вычисления интегралов в (7), получим:

A_{q_i} — оператор умножения на x_i;

A_{p_i} — дифференциальный оператор $-j\frac{h}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x_i}$;

$A_{q_i^2}$ — оператор умножения на $x_i^2 + \frac{ha_i}{4\pi b_i}$;

$A_{p_i^2}$ — оператор $-\frac{h^2}{4\pi^2}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{hb_i}{4\pi a_i}$.

Отсюда получаем, что для гамильтониана $f = p^2/(2m) + m\omega^2 q^2/2$ — линейного осциллятора с собственной частотой ω, оператор A_f имеет вид:

$$A_f = -\frac{h^2}{8\pi^2 m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{m\omega^2 q^2}{2} + \frac{h(b^2 + m^2\omega^2 a^2)}{8\pi abm}.$$

Точные вычисления оператора наблюдаемой (2)

В более общем случае, когда функция $f = f(q)$ зависит только от координат, из формулы (7) после интегрирования по p и x' получим, что $A_{f(q)}$ — оператор умножения на функцию $\overline{f}(x)$, которая имеет следующий вид:

$$\overline{f}(x) = \left(\frac{2}{h}\right)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{b_1 \ldots b_n}{a_1 \ldots a_n}\right)^{\frac{1}{2}} \int\limits_{R^n} f(q) \exp\left(-\frac{2\pi}{h} \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{a_i} (q_i - x_i)^2\right) dq.$$

То есть $\overline{f}(x)$ — функция, которая получается из функции $f(x)$ сверткой с плотностью нормального распределения с дисперсией по координате q_i, равной $ha_i/(4\pi b_i)$.

Оператор наблюдаемой (3)

Отсюда, если $f(q,p) = (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)/(2m) + V(q_1,q_2,q_3)$, — некоторый гамильтониан, то в предположении, что $a_1 = a_2 = a_3 = a$ и $b_1 = b_2 = b_3 = b$, получаем следующее выражение оператора A_f:

$$A_f = -\frac{h^2}{8\pi^2 m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right) + \frac{3hb}{4\pi a} + \bar{V}(x_1,x_2,x_3). \quad (6)$$

В частности, пусть $f(q,p)$ — гамильтониан атома водорода, у которого $V(q_1,q_2,q_3) = -e^2/r$, где $r = \sqrt{q_1^2+q_2^2+q_3^2}$, и e — заряд электрона. Тогда оператор A_f отличается от оператора Гамильтона атома водорода квантовой механики константой $3hb/(4\pi a)$, которая несущественна, и сглаженностью кулоновского потенциала. Таким образом, из наших предположений следует, что в экспериментах спектр атома водорода должен отличаться от спектра атома водорода.

Оценка параметров a и b

Такое несоответствие теоретических и экспериментальных данных было обнаружено в 40-х годах [2] — это лэмбовский сдвиг уровней атома водорода.
Сопоставление этих экспериментальных данных с расчетами методом теории возмущений спектра оператора A_f, заданного формулой (9), где f — гамильтониан атома водорода, дает следующую оценку параметров нашей модели. Отношение величин $a/b = 3,41 \cdot 10^4$сек/г, а стандартное отклонение $\Delta q = \sqrt{\frac{ha}{4\pi b}}$ нормального распределения, по которому сглаживаются наблюдаемые, зависящие только от координат, равно $4,24 \cdot 10^{-12}$см. Эта величина сравнима с величиной $h/(2\pi mc) = 3,8 \cdot 10^{-11}$см – минимальной погрешностью измерения координат электрона в квантовой электродинамике.

Возможные обобщения результата 1

1. Одно из естественных направлений развития данного подхода — это учет релятивистских эффектов. В статье построен оператор наблюдаемой A_f по классической наблюдаемой $f(q, p)$, исходя из предположения, что интенсивности сдвигов a_i и b_i по координатам и импульсам являются константами. Это предположение не согласуется с требованием релятивистской инвариантности.Следовало бы определить зависимость этих величин от импульсов и массы частиц и уточнить формулу усреднения (1).
2. В качестве группы S' рассматривалось центральное расширение группы канонических преобразование фазового пространства. Для того, чтобы учесть спин частиц интересно было бы обобщить приведенные здесь конструкции на более широкий класс расширений группы канонических преобразований.

Возможные обобщения результата 2

3. Приведенную здесь конструкцию интересно было бы распространить и на более общие фазовые пространства. В статье в качестве фазового пространства рассматривалось R^{2n}, то есть, была построена лишь локальная теория.

4. И, наконец, описание динамики наблюдаемых величин, учитывающей флуктуирующие воздействия внешней среды. Как показано в работе, время стабилизации (усреднения) под действием флуктуаций определяется величиной $h/(2\pi ab)$. Если эта величина мала, то динамика приближенно может быть описана как совокупность быстрого и медленного движений. Быстрое движение приводит к усреднению амплитуд вероятностей, а медленное определяет движение по усредненным амплитудам. Классическое уравнение Шредингера описывает лишь медленную составляющую движения микрообъекта.

Работы автора на эту тему (1)

- Beniaminov E.M. *Scattering of Waves in the Phase Space, Quantum Mechanics, and Irreversibility.*// Electronic Journal of Theoretical Physics (EJTP) 12, No. 32 (2015) 43–60
- Beniaminov E.M. *Diffusion Scattering of Waves is a Model of Subquantum Level.*//Electronic Journal of Theoretical Physics (EJTP) 11, No. 30, 35–48 (2014)
- Beniaminov E.M. Quantum Mechanics as Asymptotics of Solutions of Generalized Kramers Equation. // Electronic Journal of Theoretical Physics (EJTP) 8, No. 25 195-210 (2011)
- Бениаминов Е.М. *Диффузионные процессы в фазовых пространствах и квантовая механика* // Доклады академии наук. 2007. Т. 416. № 1. С. 31-35.

Работы автора на эту тему (2)

- Бениаминов Е.М. *Квантование как асимптотика некоторого диффузионного процесса в фазовом пространстве*// Proc. Intern. Geom. Center 2(4), 7-50 (2009)
- *Beniaminov E.M. A Method for Justification of the View of Observables in Quantum Mechanics and Probability Distributions in Phase Space* http://arxiv.org/abs/quant-ph/0106112. 2001.

Полный список работ автора на эту тему на русском и английском языках, а также тексты статей можно найти на странице http://beniaminov.rsuh.ru