Глава 1. Алгебраические методы теории баз данных

1 Некоторые определения

Пусть T — некоторое множество, которое будет называться множеством типов атрибутов. В общем случае это множество может быть и бесконечным.

Определение 1.1. Набором атрибутов называется конечное множество, типизированное элементами множества T, то есть конечное множество A, заданное вместе с отображением $t_A : A \to T$. Элементы множества A называются атрибутами. Типом атрибута $a \in A$ называется элемент $t_A(a)$ множества T. Согласованием наборов атрибутов $\varphi : B \to A$ называется отображение, сохраняющее типы атрибутов, то есть отображение конечных множеств, для которого коммутативна диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\varphi} & A \\ t_B \downarrow & & \downarrow t_A \\ T & = & T \end{array}$$

Категорию всех таких наборов атрибутов и их согласований обозначим через $\mathcal{A}_T$. Множество всех согласований из B в A будет обозначаться через $\mathcal{A}_T(B, A)$ или $\mathcal{A}(B, A)$, когда множество типов ясно из контекста. Категория наборов атрибутов $\mathcal{A}_T$ является полной подкатегорией категории $\bar{\mathcal{A}}_T$ всех множеств без ограничения конечности, типизированных множеством T, с отображениями, сохраняющими типы элементов. Множество морфизмов в этой расширенной категории будет также обозначаться через $\mathcal{A}(B, A)$ или через $\bar{\mathcal{A}}(B, A)$, если в тексте нужно подчеркнуть, что множества A или B могут быть бесконечными.

Сопоставим каждому элементу $t \in T$ множество D_t, которое называется областью значений атрибута типа t.

Определение 1.2. Отношением с набором атрибутов $A = \{a_1, ..., a_n\}$ называется подмножество $r(A) \subset D_{t_A(a1)} \times ... \times D_{t_A(an)}$ в декартовом произведении областей значений атрибутов набора A.

Множество всех отношений с набором атрибутов A обозначим через $\mathcal{D}(A)$. Для любого множества I (конечного или бесконечного) и любых отношений $r_i(A) \in \mathcal{D}(A)$, где $i \in I$, определены теоретико-множественные операции объединения $\bigcup\limits_{i \in I} r_i(A)$ и пересечения $\bigcap\limits_{i \in I} r_i(A)$. Для любых двух элементов $r_1(A), r_2(A) \in \mathcal{D}(A)$ определена теоретико множественная операция разности $r_1(A) \setminus r_2(A)$. Кроме того, в $\mathcal{D}(A)$ есть наименьшее пустое отношение $\emptyset$ и наибольшее полное отношение $E(A) = D_{t_A(a_1)} \times ... \times D_{t_A(an)}$. По отношению к этим операциям $\mathcal{D}(A)$ представляет собой полную булеву алгебру.

Определение 1.3. Операцией $f(A_1, ..., A_n; B)$ типа $(A_1, ..., A_n; B)$, где $A_1, ... A_n, B$ — наборы атрибутов, а f — имя операции, называется способ, сопоставляющий каждому набору отношений $r_1(A_1), ..., r_n(A_n)$ отношение $r(B)$, которое будет обозначаться через $f(r_1, ..., r_n)$.

Другими словами, операция $f(A_1, ..., A_n; B)$ задает отображение

$$f(A_1, ..., A_n; B) : \mathcal{D}(A_1) \times ... \times \mathcal{D}(A_n) \to \mathcal{D}(B).$$

Определение 1.4. Две операции $f_1(A_1, ..., A_n; B)$ и $f_2(A_1, ..., A_n; B)$ будем называть равными и писать $f_1 = f_2$, если они совпадают как отображения.

Замечание 1.1. Условие равенства двух операций, заданное определением 1.4, является наиболее сильным и не всегда может быть эффективно проверено.

В разных информационных системах класс всех применяемых операций над отношениями может быть разным. Однако используемые классы операций, как правило, обладают свойствами $\mathcal{K}1$ — $\mathcal{K}4$, которые перечислены ниже.

Обозначим через $\mathcal{K}$ некоторый класс операций над отношениями, а через $\mathcal{K}(A_1, ..., A_n; B)$ — множество всех операций этого класса вида $f(A_1, ..., A_n; B)$. Предполагается, что класс операций $\mathcal{K}$ обладает следующими свойствами.

$\mathcal{K}1$). Операция $\emptyset(A_1, ..., A_n; B)$, которая сопоставляет каждому набору отношений $r_1(A_1), ..., r_n(A_n)$ пустое отношение $\emptyset(B)$, принадлежит $\mathcal{K}(A_1, ..., A_n; B)$.

$\mathcal{K}2$). Операции $x_i(A_1, ..., A_n; A_i)$, которые каждому набору отношений $r(A_1), ..., r(A_n)$ сопоставляют отношения $r_i(A_i)$, то есть являются проекциями $\mathcal{D}(A_1) \times ... \times \mathcal{D}(A_n)$ на $\mathcal{D}(A_i)$, принадлежат множеству операций $\mathcal{K}(A_1, ..., A_n; B)$, для $i = 1, ..., n$.

Пусть $\{f_i(A_1, ..., A_n; B)\}_{i \in I}$ — произвольное множество операций. Определим операции $\bigcup\limits_{i \in I} f_i(A_1, ..., A_n; B)$; $\bigcap\limits_{i \in I} f_i(A_1, ..., A_n; B)$; $f_i(A_1, ..., A_n; B) \setminus f_j(A_1, ..., A_n; B)$ как операции, которые каждому набору отношений $r_1(A_1), ..., r_n(A_n)$ сопоставляют, соответственно, $\bigcup\limits_{i \in I} f_i(r_1, ..., r_n)$; $\bigcap\limits_{i \in I} f_i(r_1, ..., r_n)$; $f_i(r_1, ..., r_n) \setminus f_j(r_1, ..., r_n)$.

$\mathcal{K}3)$. Для любого множества операций $f_i \in \mathcal{K}(A_1, ...A_n; B)$, $i \in I$, определенные выше операции $\bigcup\limits_{i \in I} f_i$, $\bigcap\limits_{i \in I} f_i$, и $f_i \setminus f_j$ принадлежат множеству $\mathcal{K}(A_1, ...A_n; B)$.

Будем говорить, что отображение

$$g : \mathcal{D}(A_1) \times ... \times \mathcal{D}(A_n) \to \mathcal{D}(B_1) \times ... \times \mathcal{D}(B_k)$$

принадлежит $\mathcal{K}(A_1, ...A_n; B_1, ..., B_k)$, если каждая композиция отображений

$$x_i(B_1, ..., B_k; B_i) \circ g : \mathcal{D}(A_1) \times ... \times \mathcal{D}(A_n) \to \mathcal{D}(B_i)$$

принадлежит $\mathcal{K}(A_1, ...A_n; B_i)$, для $i = 1, ..., k$.

$\mathcal{K}4)$. Пусть отображение $g \in \mathcal{K}(A_1, ...A_n; B_1, ..., B_n)$ и операция $f \in \mathcal{K}(B_1, ...B_k; C)$, тогда существует операция $f \circ g \in \mathcal{K}(A_1, ...A_n; C)$, которая как отображение является композицией отображений f и g.

Основной пример класса операций $\mathcal{K}$, который мы будем подробнее изучать в этой работе, — это операции реляционной алгебры отношений [43].

Для того чтобы ввести эти операции, дадим несколько определений.

Обозначим через $D = \coprod\limits_{t \in T} D_t$ разъединенное объединение областей значений атрибутов всех типов. Определим тип $t_D : D \to T$ элементов множества D следующим образом: элемент $d \in D$ имеет тип $t = t_D(d)$, если $d \in D_t$.

Нетрудно видеть, что для любого набора атрибутов $A = \{a_1, ..., a_n\}$ множество $D_{t_A(a1)} \times ... \times D_{t_A(an)}$ находится в биективном соответствии с множеством $\mathcal{A}(A, D)$ всех отображений из A в D, сохраняющих тип элементов. Эта биекция задается следующим образом:

строке $(d_1, ..., d_n) \in D_{t_A(a1)} \times ... \times D_{t_A(an)}$ сопоставляется отображение $d : A \to D$ такое, что $d(a_k) = d_k$, для $k = 1, ..., n$;

наоборот, отображению $d : A \to D$ сопоставляется строка $(d(a_1), ..., d(a_n))$, где элемент $d(a_i) \in D_{t_A(ai)}$, так как отображение d сохраняет типы элементов.

Поэтому отношение $r(A)$ с набором атрибутов A можно рассматривать как подмножество $r(A) \subset \mathcal{A}(A, D)$ в множестве всех отображений из A в D, сохраняющих тип элементов.

Пусть $\varphi : B \to A$ — произвольное согласование наборов атрибутов. Морфизм φ индуцирует отображение $h_\varphi : \mathcal{A}(A, D) \to \mathcal{A}(B, D)$, которое морфизму $d : A \to D$ сопоставляет композицию морфизмов $h_\varphi(d) = d \circ \varphi$.

О п р е д е л е н и е 1.5. Если $r \subset \mathcal{A}(A, D)$ — произвольное отношение с набором атрибутов A, то через $\varphi^*(r)$ обозначается отношение с набором атрибутов B, которое является образом множества r при отображении h_φ. То есть

$$\varphi^*(r) = \{d \circ \varphi \in \mathcal{A}(B, D) : \ d \in r \subset \mathcal{A}(A, D)\}.$$

О п р е д е л е н и е 1.6. Если $r' \subset \mathcal{A}(B, D)$ — произвольное отношение с набором атрибутов B, то через $\varphi_*(r')$ обозначается отношение с набором атрибутом A, которое является прообразом множества r' относительно отображения h_φ. То есть

$$\varphi_*(r') = \{d \in \mathcal{A}(A, D) : \ d' = d \circ \varphi, d' \in r' \subset \mathcal{A}(B, D)\}.$$

Нетрудно видеть, что, когда $\varphi : B \to A$ — вложение, то операция $\varphi^* : \mathcal{D}(A) \to \mathcal{D}(B)$ является обычной операцией проекции отношений с набором атрибутов A на набор атрибутов B.

О п р е д е л е н и е 1.7. Если $\varphi_1 : A \to C$ и $\varphi_1 : B \to C$ — произвольные согласования наборов атрибутов и $r_1 \in \mathcal{D}(A)$, $r_2 \in \mathcal{D}(B)$, то обычная операция соединения отношений r_1 и r_2 относительно согласований φ_1 и φ_2, обозначаемая через $r_1 \underset{\varphi_1,\varphi_2}{\times} r_2$, выражается через определенные выше операции следующим образом:

$$r_1 \underset{\varphi_1,\varphi_2}{\times} r_2 = ((\varphi_1)_*(r_1)) \cap ((\varphi_2)_*(r_2)).$$

Если $\varphi : B \to A$ — взаимно однозначное согласование атрибутов, то операции φ^* и φ_* представляют собой обычные операции переименования атрибутов в отношениях в соответствии с отображением согласования атрибутов.

Все остальные операции Кодда получаются из уже определенных операций путем пополнения класса операций согласно свойствам $\mathcal{K}1$ — $\mathcal{K}4$.

З а м е ч а н и е 1.2. Введенные операции позволяют выразить не только обычные операции над отношениями, определенные Коддом, но и написать условие функциональной зависимости одного набора атрибутов от другого набора атрибутов для данного отношения в виде уравнения.

Приведем еще несколько примеров операций, которые не входят в класс операций, рассмотренный Коддом, но могут представлять интерес для приложений.

Постоянная операция $(const)r(B)$ типа $(A_1, ..., A_n; B)$ сопоставляет любому набору отношений $r_1(A_1), ..., r_n(A_n)$ одно и то же отношение $r(B)$.

Операция скобки $< >$ сопоставляет набору отношений $r_1(A_1), ..., r_n(A_n)$ одноэлементное отношение (строку) $< r_1(A_1), ..., r_n(A_n) >$. Эта операция позволяет рассматривать набор отношений как строку в отношении со сложными доменами атрибутов.

Следующие операции строятся с использованием произвольного отображения $f : D_{a1} \times ... \times D_{an} \to D_{b1} \times ... \times D_{bk}$, заданного на множествах возможных значений атрибутов набора $A = (a_1, ..., a_n)$ в множество возможных значений атрибутов набора $B = (b_1, ..., b_k)$. Это отображение индуцирует операцию f типа $(A; B)$, которая отношению $r(A) \in D_{a1} \times ... \times D_{an}$ сопоставляет его образ $f(r(A))$ в $D_{b1} \times ... \times D_{bk}$.

В общем случае в классе $\mathcal{K}$ могут быть операции, заданные произвольными алгоритмами [42].

З а м е ч а н и е 1.3. Нетрудно видеть, что условия $\mathcal{K}1$ — $\mathcal{K}4$ позволяют рассмотреть класс операций $\mathcal{K}$ как категорию, объектами которой являются наборы вида $(A_1, ..., A_n)$, а множества морфизмов — это множество операций $\mathcal{K}(A_1, ..., A_n; B_1, ..., B_k)$ типа $(A_1, ..., A_n; B_1, ..., B_k)$. Условие $\mathcal{K}4$ соответствует тому, что объекты $(A_1, ..., A_n)$ представляются в категории $\mathcal{K}$ в виде произведения $\prod\limits_{i=1}^{n} A_i$.

З а м е ч а н и е 1.4. В данной работе предполагается, что все операции над отношениями из класса $\mathcal{K}$ имеют конечную арность (так операция f типа $(A_1, ..., A_n; B)$ имеет арность n), кроме теоретико множественных операций, которые имеют арность I произвольной мощности. Типы этих теоретико множественных операций имеют вид $(\underbrace{A, ..., A}_{I}; A)$. Существование бесконечных теоретико множественных операций по любому множеству является техническим требованием данной работы.

2 Определение $\mathcal{K}$ алгебр

Пусть задан класс операций над отношениями $\mathcal{K}$, обладающий свойствами $\mathcal{K}1$—$\mathcal{K}4$.

Определение 2.1. Алгеброй $\mathcal{R}$ над $\mathcal{K}$ или $\mathcal{K}$-алгеброй называется следующее сопоставление:

каждому набору атрибутов A сопоставляется булева алгебра $\mathcal{R}(A)$ с бесконечными объединениями, пересечениями и разностью между элементами;

каждой операции $f \in \mathcal{K}(A_1, ..., A_n; B)$ сопоставляется отображение

$$\bar{f} : \mathcal{R}(A_1) \times ... \times \mathcal{R}(A_n) \to \mathcal{R}(B).$$

Причем сопоставление удовлетворяет следующим условиям,

$\mathcal{R}1$). Нулевой (пустой) операции $\emptyset(A_1, ..., A_n; B)$ сопоставляется постоянное отображение

$$\bar{\emptyset} : \mathcal{R}(A_1) \times ... \times \mathcal{R}(A_n) \to \mathcal{R}(B).$$

в нулевой элемент булевой алгебры $\mathcal{R}(B)$.

$\mathcal{R}2$). Операциям $x_i(A_1, ..., A_n; A_i)$ сопоставляются проекции на i-ые координаты, то есть

$$\bar{x}_i = pr_i : \mathcal{R}(A_1) \times ... \times \mathcal{R}(A_n) \to \mathcal{R}(A_i).$$

$\mathcal{R}3$). Для любого множества операций

$$f_i(A_1, ..., A_n; B) \in \mathcal{K}(A_1, ..., A_n; B), \quad i \in I,$$

имеются равенства отображений

$$\overline{\bigcup_{i \in I} f_i(A_1, ..., A_n; B)} = \bigcup_{i \in I} \overline{f_i(A_1, ..., A_n; B)},$$

$$\overline{\bigcap_{i \in I} f_i(A_1, ..., A_n; B)} = \bigcap_{i \in I} \overline{f_i(A_1, ..., A_n; B)},$$

$$\overline{f_1(A_1, ..., A_n; B) \setminus f_2(A_1, ..., A_n; B)} = \overline{f_1(A_1, ..., A_n; B)} \setminus \overline{f_2(A_1, ..., A_n; B)}.$$

$\mathcal{R}4$). Для любой операции $g \in \mathcal{K}(A_1, ..., A_n; B_1, ..., B_k)$ через $\bar{g}$ обозначим отображение

$$\bar{g} : \mathcal{R}(A_1) \times ... \times \mathcal{R}(A_n) \to \mathcal{R}(B_1) \times ... \times \mathcal{R}(B_k),$$

заданное соотношениями

$$pr_i \circ \bar{g} = \bar{x}_i(B_1, ..., B_k; B_i) \circ \bar{g}, \text{ для } i = 1, ..., k.$$

Тогда, если $g \in \mathcal{K}(A_1, ..., A_n; B_1, ..., B_k)$ и $f \in \mathcal{K}(B_1, ..., B_k; C)$, то $\overline{f \circ g} = \bar{f} \circ \bar{g}$.

П р и м е р 2.1. Через $\mathcal{D}$ обозначим $\mathcal{K}$-алгебру, в которой набору атрибутов A сопоставляется булева алгебра всех отношений $\mathcal{D}(A)$ с набором атрибутов A, а операциям $f \in \mathcal{K}$ сопоставляются они сами.

Проверка условий $\mathcal{R}1$—$\mathcal{R}4$ очевидна и следует из определения и свойств операций класса $\mathcal{K}$.

В дальнейшем $\mathcal{K}$-алгебру $\mathcal{D}$ мы будем называть $\mathcal{K}$-алгеброй отношений или $\mathcal{K}$-алгеброй действительных отношений.

П р и м е р 2.2. Обозначим через $\mathcal{K}[C_1, ..., C_l]$ для фиксированного множества наборов атрибутов $\{C_1, ..., C_l\}$ следующий объект. Для каждого набора атрибутов A положим $\mathcal{K}[C_1, ..., C_l](A) = \mathcal{K}(C_1, ..., C_l; A)$. Для любой операции $f(A_1, ..., A_n; B)$ и любых $k_i \in \mathcal{K}[C_1, ..., C_l](A_i) = \mathcal{K}(C_1, ..., C_l; A_i)$, для $i = 1, ..., n$, положим

$$\bar{f}(k_1, ..., k_n) \stackrel{def}{=} f \circ k \in \mathcal{K}(C_1, ..., C_l; B) = \mathcal{K}[C_1, ..., C_l](B),$$

где k — операция из $\mathcal{K}(C_1, ..., C_l; A_1, ..., A_n)$ такая, что $x_i \circ k = k_i$ для $i = 1, ..., n$.

Покажем, что $\mathcal{K}(C_1, ..., C_l)$ является $\mathcal{K}$-алгеброй. Для этого нужно проверить выполнение условий $\mathcal{R}1$— $\mathcal{R}4$. Условия $\mathcal{R}1$, $\mathcal{R}2$, $\mathcal{R}3$ очевидным образом следуют из определений и свойств класса операций $\mathcal{K}$. Условие $\mathcal{R}4$ также следует из определений и свойства ассоциативности композиции операций.

Пусть $\mathcal{R}$ — произвольная $\mathcal{K}$-алгебра. В дальнейшем значение отображения

$$\bar{f} : \mathcal{R}(A_1) \times ... \times \mathcal{R}(A_n) \to \mathcal{R}(B),$$

сопоставленного операции $f \in \mathcal{K}(A_1, ..., A_n; B)$ на элементе $(R_1, ..., R_n) \in \mathcal{R}(A_1) \times ... \times \mathcal{R}(A_n)$, мы будем обозначать через $f(R_1, ..., R_n)$ без черточки сверху.

З а м е ч а н и е 2.1. В информационных системах реляционного типа в каждый момент времени хранится в том или ином виде некоторое множество отношений $r_1(A_1), ..., r_n(A_n)$, имена которых $R_1, ..., R_n$ известны пользователю системы. Пользователь формулирует запрос с помощью операций из принятого в данной информационной системе класса $\mathcal{K}$, применяемых к именам $R_1, ..., R_n$ в виде $f(R_1, ..., R_n)$, где $f \in \mathcal{K}(A_1, ..., A_n; B)$. Ответом на данный запрос в данный момент является отношение $r(B) = f(r_1, ..., r_n)$. Множество всех запросов $\{f(R_1, ..., R_n)\}$ с точностью до объявленных соотношений между ними образует $\mathcal{K}$-алгебру, которая называется $\mathcal{K}$-алгеброй данной информационной системы.

З а м е ч а н и е 2.2. На языке теории категорий определение $\mathcal{K}$-алгебры можно перефразировать следующим образом. Рассмотрим категорию операций над отношениями $\mathcal{K}$ (в том числе, и теоретико множественных операций). Алгеброй $\mathcal{R}$ над $\mathcal{K}$ называется функтор $\mathcal{R} : \mathcal{K} \to Set$ из категории $\mathcal{K}$ в категорию множеств Set, который прямое произведение объектов переводит в декартово произведение множеств, а постоянные операции (типа $\emptyset$) — в постоянные отображения множеств. Это определение соответствует определению Ловера [63] алгебры над произвольной категорией с произведениями. Изучаемые в данной работе алгебры можно рассматривать как многоосновные (о многоосновных алгебрах на русском языке см. [15, 28]), где каждое $\mathcal{R}(A)$ для набора атрибутов A является основанием многоосновной алгебры $\mathcal{R}$.

3 Гомоморфизмы и идеалы $\mathcal{K}$-алгебр

Пусть $\mathcal{R}_1$ и $\mathcal{R}_2$ — $\mathcal{K}$-алгебры. Тогда гомоморфизмы булевых алгебр $j_A : \mathcal{R}_1(A) \to \mathcal{R}_2(A)$, заданные для каждого набора атрибутов A, называются $\mathcal{K}$-гомоморфизмом алгебр $j : \mathcal{R}_1 \to \mathcal{R}_2$, если для любой операции $f \in \mathcal{K}(A_1, ..., A_n; B)$ и любых $R_i \in \mathcal{R}_1(A_i)$, для $i = 1, ..., n$, выполняется соотношение

$$j_B(f(R_1, ..., R_n)) = f(j_{A_1}(R_1), ..., j_{An}(R_n)).$$

В частности, $\mathcal{K}$-гомоморфизм переводит пустой элемент $\mathcal{R}_1(A)$ в пустой элемент $\mathcal{R}_2(A)$.

Подмножества $j_A^{-1}(\emptyset) \subset \mathcal{R}_1(A)$ для всех наборов атрибутов A называется ядром гомоморфизма j и обозначается через $Ker(j)$.

Семейство идеалов $\mathcal{J}(A) \subset \mathcal{R}(A)$ булевых алгебр $\mathcal{R}(A)$, для всех наборов атрибутов A, называется идеалом $\mathcal{K}$-алгебры и обозначается через $\mathcal{J}$, если для любой операции $f \in \mathcal{K}(A_1, ..., A_n; B)$ и любых элементов $R_i \in \mathcal{R}(A_i)$ и $J_i \in \mathcal{J}(A_i)$, где $i = 1, ..., n$, выполняется соотношение

$$f(R_1 + J_1, ...R_n + J_n) + f(R_1, ..., R_n) \in \mathcal{J}(B),$$

где знаком плюс $(+)$ обозначена операция симметрической разности между элементами в соответствующей булевой алгебры, то есть $a + b \stackrel{def}{=} (a \setminus b) \cup (b \setminus a)$.

У т в е р ж д е н и е 3.1. Пусть $\mathcal{J}$ — идеал $\mathcal{K}$-алгебры $\mathcal{R}$, и f — операция из $\mathcal{K}(A_1, ..., A_{n+k};\ B)$ такая, что

$$\begin{aligned}&f(x_1(A_1, ..., A_n; A_1), ..., x_n(A_1, ..., A_n; A_n),\\&\qquad\qquad \emptyset(A_1, ..., A_n; A_{n+1}), ..., \emptyset(A_1, ..., A_n; A_{n+k})) =\\&= \emptyset(A_1, ..., A_n; B).\end{aligned}$$

Тогда для любых $R_i \in \mathcal{R}(A_i)$, $i = 1, ..., n$ и $J_l \in \mathcal{J}(A_{n+l})$, где $l = 1, ..., k$, элемент $f(R_1, ...R_n;\ J_1, ..., J_k)$ принадлежит $\mathcal{J}(B)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $R'_1 = R_1, ..., R'_n = R_n, R'_{n+1} = \emptyset, ..., R'_{n+k} = \emptyset$ и $J'_1 = \emptyset, ..., J'_n = \emptyset, J'_{n+1} = J_1, ..., J'_{n+k} = J_k$. Тогда, по определению идеала $\mathcal{K}$-алгебры, имеем:

$$f(R'_1 + J'_1, ..., R'_{n+k} + J'_{n+k}) + f(R'_1, ..., R'_{n+k}) \in \mathcal{J}(B).$$

С другой стороны, имеем:

$$\begin{aligned}&f(R_1'+J_1',...R_{n+k}'+J_{n+k}')+f(R_1',...,R_{n+k}')=\\&=f(R_1,...,R_n,J_1,...,J_k)+f(R_1,...,R_n,\emptyset,...,\emptyset)=\\&=f(R_1,...,R_n,J_1,...,J_k),\end{aligned}$$

так как, согласно условию, второе слагаемое $f(R_1,...,R_n,\emptyset,...,\emptyset)=\emptyset$.

Утверждение 3.2. Пусть $\mathcal{J}$ — идеал в $\mathcal{K}$-алгебре $\mathcal{R}$. Тогда в объекте, сопоставляющем каждому набору атрибутов A булеву алгебру $\mathcal{R}(A)/\mathcal{J}(A)$, естественным образом вводится структура $\mathcal{K}$-алгебры так, что отображение $\mathcal{R}\to\mathcal{R}(A)/\mathcal{J}(A)$ является гомоморфизмом $\mathcal{K}$-алгебр.

Доказательство. Действительно, пусть $[R_i]\in\mathcal{R}(A_i)/\mathcal{J}(A_i)$, $i=1,...,n$, — смежные классы, определенные элементами $R_i\in\mathcal{R}(A_i)$. Пусть $f(A_1,...,A_n;\ B)$ — операция. Определим $f([R_1],...,[R_n])$ — как смежный класс в $\mathcal{R}(A_i)/\mathcal{J}(A_i)$, определенный элементом $f(R_1,...,R_n)$. Докажем корректность этого определения. Пусть $R_1+J_1,...,R_n+J_n$ — другой набор представителей тех же смежных классов. Тогда, по определению идеала,

$$f(R_1+J_1,...,R_n+J_n)+f(R_1,...,R_n)\in\mathcal{J}(B),$$

то есть элементы $f(R_1+J_1,...,R_n+J_n)$ и $f(R_1,...,R_n)$ определяют один и тот же элемент в $\mathcal{R}(B)/\mathcal{J}(B)$. Легко видеть, кроме того, что так определенное действие операций на $\mathcal{R}/\mathcal{J}$ удовлетворяет условиям $\mathcal{R}1$ — $\mathcal{R}4$, то есть $\mathcal{R}/\mathcal{J}$ является $\mathcal{K}$-алгеброй.

Утверждение 3.3. Ядро $Ker(j)$ гомоморфизма $\mathcal{K}$-алгебр $j:\mathcal{R}_1\to\mathcal{R}_2$ является идеалом.

Доказательство. Пусть $R_i\in\mathcal{R}(A_i)$, $J_i\in j_{Ai}^{-1}(\emptyset)$, для $i=1,...,n$, и $f(A_1,...,A_n;\ B)$ — произвольная операция класса $\mathcal{K}$. Рассмотрим

$$\begin{aligned}&j_B(f(R_1+J_1,...,R_n+J_n)+f(R_1,...,R_n))=\\&=j_B(f(R_1+J_1,...,R_n+J_n))+j_B(f(R_1,...,R_n))=\\&=f(j_{A_1}(R_1+J_1),...,j_{An}(R_n+J_n))+f(j_{A_1}(R_1),...,j_{An}(R_n))=\\&=f(j_{A_1}(R_1),...,j_{An}(R_n))+f(j_{A_1}(R_1),...,j_{An}(R_n))=\emptyset,\end{aligned}$$

где все равенства были получены на основании свойства гомоморфизма $\mathcal{K}$-алгебр. Отсюда,

$$f(R_1+J_1,...,R_n+J_n)+f(R_1,...,R_n)\in j_B^{-1}(\emptyset).$$

У т в е р ж д е н и е 3.4. Если $j : \mathcal{R}_1 \to \mathcal{R}_2$ — гомоморфизм и $\mathcal{J}_1 \subset \mathcal{R}_1$, $\mathcal{J}_2 \subset \mathcal{R}_2$ — идеалы $\mathcal{K}$-алгебр такие, что $j(\mathcal{J}_1) \subset \mathcal{J}_2$, то существует единственный гомоморфизм $j' : \mathcal{R}_1/\mathcal{J}_1 \to \mathcal{R}_2/\mathcal{J}_2$, делающий следующую диаграмму коммутативной:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}_1 & \longrightarrow & \mathcal{R}_1/\mathcal{J}_1 \\ j \downarrow & & \downarrow j' \\ \mathcal{R}_2 & \longrightarrow & \mathcal{R}_1/\mathcal{J}_2 \end{array}$$

Доказательство очевидно.

Подалгеброй $\mathcal{R}_1 \subset \mathcal{R}_2$ алгебры $\mathcal{R}_2$ называется семейство подалгебр $\mathcal{R}_1(A) \subset \mathcal{R}_2(A)$ булевых алгебр $\mathcal{R}_2(A)$ для всех наборов атрибутов A, замкнутое относительно операций класса $\mathcal{K}$.

Пусть $S = \{R_i\}_{i \in I}$ — множество элементов $\mathcal{K}$-алгебры $\mathcal{R}$, то есть $R_i \in \mathcal{R}(A_i)$, для $i \in I$. Через $\mathcal{R}\{S\}$ обозначим пересечение всех подалгебр в $\mathcal{R}$, содержащих S. Очевидно, что $\mathcal{R}\{S\}$ — подалгебра в $\mathcal{R}$. Эту подалгебру называют подалгеброй, порожденной множеством элементов S.

П р и м е р 3.1. Рассмотрим алгебру отношений $\mathcal{D}$ примера 2.1. Обозначим через $\mathcal{E}$ подалгебру алгебры $\mathcal{D}$, порожденную наибольшими отношениями — элементами вида $D_{a_1} \times ... \times D_{an} \in \mathcal{D}(A)$ для каждого набора атрибутов $A = \{a_1, ..., a_n\}$, где D_{ai} — множество возможных значений атрибута a_i. Алгебра $\mathcal{E}$ называется $\mathcal{K}$-алгеброй единиц.

Если $\mathcal{R} = \mathcal{R}\{S\}$, то говорят, что S является множеством образующих $\mathcal{K}$-алгебры $\mathcal{R}$. Если S — конечно, то говорят, что $\mathcal{R}$ конечно порождена.

Заметим, что, как и в случае колец, гомоморфизм $\mathcal{K}$-алгебр однозначно определяется своим действием на образующие. Именно, пусть $j : \mathcal{R}_1 \to \mathcal{R}_2$ — гомоморфизм $\mathcal{K}$-алгебр, и пусть S — множество образующих $\mathcal{K}$-алгебры $\mathcal{R}_1$. Тогда не существует гомоморфизма из $\mathcal{R}_1$ в $\mathcal{R}_2$, отличного от j и совпадающего с j на множестве S.

У т в е р ж д е н и е 3.5. Пусть $j : \mathcal{R}_1 \to \mathcal{R}_2$ — гомоморфизм $\mathcal{K}$-алгебр. Тогда образ $j(\mathcal{R}_1)$ — подалгебра в $\mathcal{R}_2$.

Доказательство очевидно.

Перейдем, теперь, к построению свободных $\mathcal{K}$-алгебр. Рассмотрим $\mathcal{K}$-алгебру $\mathcal{K}[C_1, ..., C_l]$ (пример 2.2.).

У т в е р ж д е н и е 3.6. Элементы $X_i \overset{def}{=} x_i(C_1, ..., C_l;\ C_i)$, где $x_i(C_1, ..., C_l;\ C_i) \in \mathcal{K}[C_1, ..., C_l](C_i)$, для $i = 1, ..., l$, являются образующими $\mathcal{K}$-алгебры $\mathcal{K}[C_1, ..., C_l]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $R \in \mathcal{K}[C_1, ..., C_l](A)$. Тогда, по определению (см. пример 2.2), $R = g$ для некоторой операции $g \in \mathcal{K}(C_1, ..., C_l;\ A)$. С другой стороны, имеем:

$$R = g = g(x_1(C_1, ..., C_l;\ C_1), ..., x_l(C_1, ..., C_l;\ C_l)) = g(X_1, ..., X_l).$$

По определению подалгебры, если подалгебра алгебры $\mathcal{K}[C_1, ..., C_l]$ содержит элементы $X_1, ..., X_n$, то она содержит элемент $R = g(X_1, ..., X_l)$. Так как R — произвольный элемент, то $X_1, ..., X_n$ — образующие алгебры $\mathcal{K}[C_1, ..., C_l]$.

У т в е р ж д е н и е 3.7. Пусть $\mathcal{R}$ — произвольная $\mathcal{K}$-алгебра и $R_i \in \mathcal{R}(C_i)$, для $i = 1, ..., l$ — ее любые элементы. Тогда существует единственный $\mathcal{K}$-гомоморфизм

$$j : \mathcal{K}[C_1, ..., C_l] \to \mathcal{R}$$

такой, что $j(X_i) = R_i$, для $i = 1, ..., l$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для $g \in \mathcal{K}[C_1, ..., C_l](A) = \mathcal{K}(C_1, ..., C_l;\ A)$ положим $j(g) = g(R_1, ..., R_l)$. Покажем, что построенное отображение есть гомоморфизм булевых алгебр. Действительно, пусть $\{g_i(C_1, ..., C_l;\ A)\}_{i \in I}$ — множество элементов $\mathcal{K}[C_1, ..., C_l](A)$. Тогда

$$j(\bigcup_{i \in I} g_i) = (\bigcup_{i \in I} g_i)(R_1, ..., R_l) = \bigcup_{i \in I} g_i(R_1, ..., R_l).$$

Последнее равенство следует из того, что $\mathcal{R}$ — это $\mathcal{K}$-алгебра и поэтому удовлетворяет условию $\mathcal{R}3$. Аналогично доказывается, что пересечение переходит в пересечение и разность в разность. Пусть, теперь, $f \in \mathcal{K}(A_1, .., A_n;\ B)$ и g_i — произвольные элементы $\mathcal{K}(C_1, ..., C_l;\ A_i)$, для $i = 1, ..., n$. Тогда,

$$j(f(g_1, ..., g_n)) = f(g_1, ..., g_n)(R_1, ..., R_l) = f \circ g(R_1, ..., R_l).$$

Так как $\mathcal{R}$ — $\mathcal{K}$-алгебра и удовлетворяет свойству $\mathcal{R}4$, то последнее выражение представляется в виде:

$$f(g_1(R_1, ..., R_l), ..., g_n(R_1, ..., R_l)) = f(j(g_1), ..., j(g_n)).$$

Тем самым доказано, что j — гомоморфизм. Единственность такого гомоморфизма следует из того, что $X_1, ..., X_l$ — образующие $\mathcal{K}$-алгебры $\mathcal{K}[C_1, ..., C_l]$.

Алгебра $\mathcal{K}[C_1, ..., C_l]$ будет в дальнейшем называться свободной $\mathcal{K}$-алгеброй с образующими $X_1, ..., X_l$.

У т в е р ж д е н и е 3.8. Пусть $R_i \in \mathcal{R}(A_i)$, для $i = 1, ..., n$, — образующие $\mathcal{K}$-алгебры $\mathcal{R}$. Тогда для любого элемента $R \in \mathcal{R}(B)$ найдется такая операция $f \in \mathcal{K}(A_1, ..., A_n;\ B)$, что $R = f(R_1, ..., R_n)$.

Это утверждение непосредственно следует из утверждений 3.7 и 3.6.

Пусть $M = \{J_i\}_{i \in I}$ — множество элементов $\mathcal{K}$-алгебры $\mathcal{R}$, то есть $J_i \in \mathcal{R}(A_i)$, для $i \in I$. Обозначим через $\mathcal{J}\{M\}$ пересечение всех идеалов $\mathcal{R}$, содержащих M. Очевидно, что $\mathcal{J}\{M\}$ — идеал $\mathcal{K}$-алгебры $\mathcal{R}$. Идеал $\mathcal{J}\{M\}$ называется идеалом, порожденным элементами множества M, а само множество M называется множеством образующих идеала $\mathcal{J}\{M\}$.

У т в е р ж д е н и е 3.9. Пусть $\mathcal{R}$ — $\mathcal{K}$-алгебра, порожденная элементами $R_i \in \mathcal{R}(A_i)$, для $i = 1, ..., n$, и $\mathcal{J}$ — идеал, порожденный конечным множеством $M = \{J_s\}_{s \in I}$ элементов $J_s \in \mathcal{R}(A_{n+s})$, $s = 1, ..., k$. Тогда для каждого набора атрибутов B множество элементов вида $\mathcal{J}\{M\}(B)$ в точности совпадает с множеством $\mathcal{J}'(B)$ элементов вида $f(R_1, ..., R_n, J_1, ..., J_k)$, где $f \in \mathcal{K}(A_1, ..., A_{n+k};\ B)$ — произвольная операция, обладающая следующим свойством:

$$\begin{aligned}&f(x_1(A_1, ...A_n;\ A_1), ..., x_n(A_1, ...A_n;\ A_n),\\ &\quad \emptyset(A_1, ..., A_n;\ A_{n+1}), ..., \emptyset(A_1, ...A_n;\ A_{n+k})) = \emptyset(A_1, ...A_n;\ B).\end{aligned}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно утверждению 3.1, элементы вида $f(R_1, ..., R_n, J_1, ..., J_k)$, где операция f удовлетворяет условию утверждения 3.9, принадлежат любому идеалу, содержащему элементы $J_1, ..., J_k$. Осталось показать, что $\mathcal{J}'$ — идеал. Для сокращения записи будем писать просто x_i вместо $x_i(A_1, ..., A_n;\ A_i)$ и $\emptyset$ вместо $\emptyset(A_1, ..., A_n;\ B)$, если тип операции известен из контекста. Покажем, сначала, что $\mathcal{J}'(B)$ — идеал булевой алгебры $\mathcal{R}'(B)$. Пусть $\{J'_i = f(R_1, ..., R_n, J_1, ..., J_k)\}_{i \in I}$ — произвольное подмножество в $\mathcal{J}'(B)$. Имеем

$\bigcup\limits_{i \in I} J'_i = \bigcup\limits_{i \in I} f_i(R_1, ..., R_n, J_1, ..., J_k) =$ (так как $\mathcal{R}$ — $\mathcal{K}$-алгебра и выполняется условие $\mathcal{R}3$) $= (\bigcup\limits_{i \in I} f_i)(R_1, ..., R_n, J_1, ..., J_k)$. С другой стороны,

$$(\bigcup_{i \in I} f_i)(x_1, ..., x_n, \emptyset, ..., \emptyset) = \bigcup_{i \in I} f_i(x_1, ..., x_n, \emptyset, ..., \emptyset) = \bigcup_{i \in I} \emptyset = \emptyset.$$

Отсюда, $\bigcup\limits_{i \in I} J'_i \in \mathcal{J}'(B)$. Пусть, теперь, $J' = f(R_1, ..., R_n, J_1, ..., J_k) \in$

$\mathcal{J}'(B)$ и R' — произвольный элемент $\mathcal{R}(B)$. Покажем, что $J'\bigcap R' \in \mathcal{J}'(B)$. Так как $R_1, ..., R_n$ — образующие $\mathcal{K}$-алгебры $\mathcal{R}$, то, согласно утверждению 3.8, существует операция $g \in \mathcal{K}(A_1, ... A_n\ B)$ такая, что $R' = g(R_1, ..., R_n)$. Тогда

$$J' \cap R' = f(R_1, ..., R_n, J_1, ..., J_k) \cap g(R_1, ..., R_n) =$$
$$= (f \cap g)(R_1, ..., R_n, J_1, ..., J_k).$$

С другой стороны, имеем:

$$(f \cap g)(x_1, ..., x_n, \emptyset, ..., \emptyset) = f(x_1, ..., x_n, \emptyset, ..., \emptyset) \bigcap g(x_1, ..., x_n) =$$
$$= \emptyset \bigcap g(x_1, ..., x_n) = \emptyset.$$

Отсюда, $J'\bigcap R' \in \mathcal{J}'(B)$. Итак, доказано, что $\mathcal{J}'(B)$ идеал булевой алгебры $\mathcal{R}(B)$.

Для завершения доказательства утверждения рассмотрим для произвольной операции $F \in \mathcal{K}(B_1, ..., B_s;\ C)$ и произвольных элементов $R'_j \in \mathcal{R}(B_j)$, $J'_j \in \mathcal{J}'(B_j)$ выражение $F(R'_1 + J'_1, ..., R'_s + J'_s) + F(R'_1, ..., R'_s)$. Так как $R_1, ..., R_n$ — образующие $\mathcal{K}$-алгебры $\mathcal{R}$, то, согласно утверждению 3.8, найдутся операции $g_j \in \mathcal{K}(A_1, ..., A_n;\ B_j)$ такие,что $R'_j = g_j(R_1, ..., R_n)$, для $j = 1, ..., s$. По определению $\mathcal{J}'$, элементы $J'_j \in \mathcal{J}'(B)$ имеют вид $J'_j = f_j(R_1, ..., R_n, J_1, ..., J_k)$, где операции $f_j \in \mathcal{K}(A_1, ..., A_{n+k}; B)$, для $j = 1, ..., s$, такие, что $f_j(x_1, ..., x_n, \emptyset, ..., \emptyset) = \emptyset$, для $j = 1, ..., s$.

Итак, имеем:

$$\begin{aligned}
&F(R'_1 + J'_1, ..., R'_s + J'_s) + F(R'_1, ..., R'_s) = \\
&= F(g_1(R_1, ..., R_n) + f_1(R_1, ..., R_n, J_1, ..., J_k), ... \\
&\quad ..., g_s(R_1, ..., R_n) + f_s(R_1, ..., R_n, J_1, ..., J_k)) + \\
&+F(g_1(R_1, ..., R_n), ..., g_s(R_1, ..., R_n)).
\end{aligned}$$

Обозначим операцию от $R_1, ..., R_n, J_1, ..., J_k$, запись которой есть вся правая часть последнего равенства, через $\Phi \in \mathcal{K}(A_1, ..., A_{n+k};\ C)$.

С другой стороны, имеем:

$$\Phi(x_1, ..., x_n, \emptyset, ..., \emptyset) =$$
$$= F(g_1(x_1, ..., x_n) + f_1(x_1, ..., x_n, \emptyset, ..., \emptyset), ...,$$

$$
\begin{aligned}
&g_s(x_1, ..., x_n) + f_s(x_1, ..., x_n, \emptyset, ..., \emptyset)) + \\
&+F(g_1(x_1, ..., x_n), ..., g_s(x_1, ..., x_n)) = \\
&= F(g_1(x_1, ..., x_n) + \emptyset, ..., g_s(x_1, ..., x_n) + \emptyset) + \\
&+F(g_1(x_1, ..., x_n), ..., g_s(x_1, ..., x_n)) = \\
&= F(g_1(x_1, ..., x_n), ..., g_s(x_1, ..., x_n)) + \\
&+F(g_1(x_1, ..., x_n), ..., g_s(x_1, ..., x_n)) = \emptyset.
\end{aligned}
$$

Отсюда,

$$F(R_1' + J_1', ..., R_s' + J_s') + F(R_1', ..., R's) = \Phi(R_1, ..., R_n, J_1, ..., J_k) \in \mathcal{J}'(C),$$

то есть $\mathcal{J}'$ — идеал.

4 Категория $\mathcal{K}$-алгебр

В дальнейшем будем рассматривать только такие $\mathcal{K}$-алгебры, которые порождаются множествами образующих.

Легко видеть, что такие $\mathcal{K}$-алгебры и их гомоморфизмы образуют категорию. Множество гомоморфизмов из $\mathcal{K}$-алгебры $\mathcal{R}_1$ в $\mathcal{R}_2$ будет обозначаться через $\mathcal{K}(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$.

Особо выделяется множество гомоморфизмов $\mathbf{S}(\mathcal{R}) = \mathcal{K}(\mathcal{R}, \mathcal{D})$ из $\mathcal{K}$-алгебры $\mathcal{R}$ в $\mathcal{K}$-алгебру действительных отношений $\mathcal{D}$ примера 2.1. Множество $\mathbf{S}(\mathcal{R})$ называется множеством или пространством возможных состояний алгебры $\mathcal{R}$. Это название связано с тем, что, если $\mathcal{R}$ — алгебра запросов некоторой информационной системы, и информационная система находится в некотором состоянии S, то по каждому запросу $R \in \mathcal{R}(A)$ выдается ответ $S(R) \in \mathcal{D}(A)$, причем отображение $S : \mathcal{R} \to \mathcal{D}$ является $\mathcal{K}$-гомоморфизмом.

Будем говорить, что $\mathcal{R}_1$ изоморфна $\mathcal{R}_2$, если существуют гомоморфизмы $j_1 : \mathcal{R}_1 \to \mathcal{R}_2$, $j_2 : \mathcal{R}_2 \to \mathcal{R}_1$ такие, что их композиции $j_2 \circ j_1 = id(\mathcal{R}_1)$, $j_1 \circ j_2 = id(\mathcal{R}_2)$ есть тождественные гомоморфизмы. Изоморфизм $\mathcal{K}$-алгебр $\mathcal{R}_1$ и $\mathcal{R}_2$ будем обозначать знаком $\approx$ и писать $\mathcal{R}_1 \approx \mathcal{R}_2$.

Тривиальным упражнением является доказательство изоморфизма множеств состояний $\mathbf{S}(\mathcal{R}_1) \approx \mathbf{S}(\mathcal{R}_2)$ для изоморфных $\mathcal{K}$-алгебр $\mathcal{R}_1 \approx \mathcal{R}_2$.

Пусть $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}'$ — две $\mathcal{K}$-алгебры. Через $\mathcal{R} \oplus \mathcal{R}'$ обозначим следующую $\mathcal{K}$-алгебру, которую будем называть суммой $\mathcal{K}$-алгебр.

Каждому набору атрибутов A сопоставляется булева алгебра $(\mathcal{R} \oplus \mathcal{R}')(A) = \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{R}'(A)$ — прямая сумма булевых алгебр $\mathcal{R}(A)$ и $\mathcal{R}'(A)$, то есть элементами $(\mathcal{R} \oplus \mathcal{R}')(A)$ являются пары (R, R'), где $R \in \mathcal{R}(A)$, $R' \in \mathcal{R}'(A)$, а все операции выполняются по каждой координате отдельно. Выполнение условий $\mathcal{R}1$ — $\mathcal{R}4$ при этом тривиально проверяется.

Из определения суммы $\mathcal{R} \oplus \mathcal{R}'$ следует, что отображения $j : \mathcal{R} \oplus \mathcal{R}' \to \mathcal{R}$ и $j' : \mathcal{R} \oplus \mathcal{R}' \to \mathcal{R}'$, сопоставляющие элементу (R, R') элементы $j(R, R') = R$ и $j'(R, R') = R'$, являются гомоморфизмами $\mathcal{K}$-алгебр.

У т в е р ж д е н и е 4.1. Пусть $i_1 : \mathcal{R}'' \to \mathcal{R}$ и $i_2 : \mathcal{R}'' \to \mathcal{R}'$ — произвольные гомоморфизмы $\mathcal{K}$-алгебр. Тогда существует единственный гомоморфизм $(i_1 \oplus i_2) : \mathcal{R}'' \to \mathcal{R} \oplus \mathcal{R}'$ такой, что выполняются следующие равенства для композиций гомоморфизмов $j \circ (i_1 \oplus i_2) = i_1$ и $j' \circ (i_1 \oplus i_2) = i_2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $R'' \in \mathcal{R}''(A)$. Так как, согласно условию утверждения $j \circ (i_1 \oplus i_2)(R'') = i_1(R'')$ и $j' \circ (i_1 \oplus i_2)(R'') = i_2(R'')$, то из определения гомоморфизмов j и j' следует, что $(i_1 \oplus i_2)(R'') = (i_1(R''),\ i_2(R''))$. Осталось проверить, что так определенное отображение является гомоморфизмом, а это очевидно.

Перейдем к определению тензорного произведения $\mathcal{K}$-алгебр. Пусть $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}$ — алгебры с конечными множествами образующих S и S', соответственно. Рассмотрим свободную алгебру $\mathcal{K}[S \cup S']$ с множеством образующих $S \cup S'$ (см. пример 2.2). Согласно утверждению 3.7, чтобы задать гомоморфизм из свободной алгебры, достаточно только задать отображение на образующих.

Положим $\bar{p} : \mathcal{K}[S] \to \mathcal{K}[S \cup S']$ и $\bar{p}' : \mathcal{K}[S'] \to \mathcal{K}[S \cup S']$ — гомоморфизмы, заданные равенствами $\bar{p}(s) = s$, для $s \in S$ и $\bar{p}'(s') = s'$, для $s' \in S'$.

Пусть $j : \mathcal{K}[S] \to \mathcal{R}$ и $j : \mathcal{K}[S'] \to \mathcal{R}'$ — гомоморфизмы, тождественные на образующих.

Обозначим через $\mathcal{J} = \mathcal{J}\{\bar{p}(Ker(j)) \cup \bar{p}'(Ker(j'))\}$ идеал в $\mathcal{K}[S \cup S']$, порожденный элементами вида $\bar{p}(R)$ и $\bar{p}'(R')$, где элементы R и R' принадлежат ядрам гомоморфизмов j и j', то есть $j(R) = \emptyset$ и $j'(R') = \emptyset$.

Тензорным произведением $\mathcal{K}$-алгебр $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}'$ с множествами образующих S и S' называется $\mathcal{K}$-алгебра $\mathcal{R} \otimes \mathcal{R}' = \mathcal{K}[S \cup S']/\mathcal{J}$.

Согласно утверждению 3.4, имеем коммутативную диаграмму $\mathcal{K}$-алгебр и идеалов:

$$\begin{array}{ccccc}
Ker(j) & \to & \mathcal{J} = \mathcal{J}\{\bar{p}(Ker(j)) \cup \bar{p}'(Ker(j'))\} & \leftarrow & Ker(j') \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{K}[S] & \xrightarrow{\bar{p}} & \mathcal{K}[S \cup S'] & \xleftarrow{\bar{p}'} & \mathcal{K}[S'] \\
j \downarrow & & \downarrow j \otimes j' & & \downarrow j' \\
\mathcal{R} & \xrightarrow{p} & \mathcal{R} \otimes \mathcal{R}' & \xleftarrow{p'} & \mathcal{R}'
\end{array}$$

У т в е р ж д е н и е 4.2. Пусть $i_1 : \mathcal{R} \to \mathcal{R}''$ и $i_2 : \mathcal{R}' \to \mathcal{R}''$ — произвольные гомоморфизмы $\mathcal{K}$-алгебр. Тогда существует единственный гомоморфизм $\mathcal{K}$-алгебр $i_1 \otimes i_2 : \mathcal{R} \otimes \mathcal{R}' \to \mathcal{R}''$ такой, что композиции гомоморфизмов $(i_1 \otimes i_2) \circ p = i_1$ и $(i_1 \otimes i_2) \circ p' = i_2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если гомоморфизм $i_1 \otimes i_2$ существует, то сквозной гомоморфизм

$$\overline{i_1 \otimes i_2} : \mathcal{K}[S \cup S'] \stackrel{j \otimes j'}{\to} \mathcal{R} \otimes \mathcal{R}' \stackrel{i_1 \otimes i_2}{\to} \mathcal{R}''$$

на образующих, согласно условию утверждения и коммутативности приведенной выше диаграммы, имеет вид $\overline{i_1 \otimes i_2}(s) = i_1(s)$, для $s \in S$ и

$\overline{i_1 \otimes i_2}(s') = i_2(s')$, для $s' \in S'$. Отсюда следует единственность гомоморфизма $i_1 \otimes i_2$. Для доказательства существования рассмотрим гомоморфизм $\overline{i_1 \otimes i_2} : \mathcal{K}[S \cup S'] \to \mathcal{R}''$, определенный на образующих соотношениями, выписанными выше. Так как $i_1 \circ j = \overline{i_1 \otimes i_2} \circ \bar{p}$, что легко проверяется на образующих алгебры $\mathcal{K}[S]$, то $\bar{p}(Ker(j)) \subset Ker(\overline{i_1 \otimes i_2})$. Действительно, пусть $R \in \mathcal{K}[S]$ и $j(R) = \emptyset$. Тогда

$$(\overline{i_1 \otimes i_2})(\bar{p}(R)) = i_1 \circ j(R) = \emptyset.$$

Аналогично показывается, что $\bar{p}'(Ker(j')) \subset Ker(\overline{i_1 \otimes i_2})$. Отсюда, $\mathcal{J} \subset Ker(\overline{i_1 \otimes i_2})$, так как $\mathcal{J}$ – наименьший идеал, содержащий $\bar{p}(Ker(j))$ и $\bar{p}'(Ker(j'))$. Из утверждения 3.4 следует существование гомоморфизма

$$i_1 \otimes i_2 : \mathcal{R} \otimes \mathcal{R}' = \mathcal{K}[S \cup S']/\mathcal{J} \to \mathcal{K}[S \cup S']/Ker(\overline{i_1 \otimes i_2}) = \mathcal{R}''.$$

Проверка условий утверждения 3.4 тривиальна, так как эти условия выполняются на образующих.

С л е д с т в и е 4.3. Определение тензорного произведения не зависит от выбора образующих в $\mathcal{K}$-алгебрах.

С л е д с т в и е 4.4. Пространство состояний $\mathbf{S}(\mathcal{R} \otimes \mathcal{R}') = \mathbf{S}(\mathcal{R}) \times \mathbf{S}(\mathcal{R}')$.

Пусть $\mathcal{C}$ — некоторая $\mathcal{K}$-алгебра, которую мы будем называть алгеброй констант.

$\mathcal{C}$-алгеброй $\mathcal{R}$ называется $\mathcal{K}$-алгебра с выделенным гомоморфизмом $\mathcal{K}$-алгебр $i_\mathcal{R} : \mathcal{C} \to \mathcal{R}$.

Гомоморфизмом $\mathcal{C}$-алгебр $j : \mathcal{R}_1 \to \mathcal{R}_2$ называется гомоморфизм $\mathcal{K}$-алгебр, обладающий свойством $i_{\mathcal{R}_2} = j \circ i_{\mathcal{R}_1}$.

Идеал $\mathcal{J} \subset \mathcal{R}$ $\mathcal{C}$-алгебры $\mathcal{R}$ называется $\mathcal{C}$-идеалом, если выполняется равенство $\mathcal{J} \cap i_\mathcal{R}(\mathcal{C}) = \emptyset$.

Очевидно, что $\mathcal{C}$-алгебры и их гомоморфизмы образуют категорию. Множество гомоморфизмов из $\mathcal{C}$-алгебры $\mathcal{R}_1$ в $\mathcal{C}$-алгебру $\mathcal{R}_2$ будем обозначать через $\mathcal{C}(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$.

Если в качестве алгебры констант $\mathcal{C}$ берется $\mathcal{K}$-алгебра единиц $\mathcal{E}$, введенная в примере 3.1 и для любого набора атрибутов A элемент $i_\mathcal{R}(E(A))$ является единицей в булевой алгебре $\mathcal{R}(A)$, то такую алгебру $\mathcal{R}$ называют $\mathcal{K}$-алгеброй с единицей.

Пусть, теперь, $\mathcal{K}'$ — другой класс операций над отношениями, удовлетворяющий условиям $\mathcal{K}1$—$\mathcal{K}4$, и $\mathcal{K} \subset \mathcal{K}'$. Такой класс операций $\mathcal{K}'$ называется расширением класса $\mathcal{K}$. Пусть $\mathcal{R}$ — произвольная $\mathcal{K}$-алгебра с конечным множеством образующих $S = \{R_1, ..., R_n\}$ и конечным числом соотношений $f_1(R_1, ..., R_n) = \emptyset, ..., f_k(R_1, ..., R_n) = \emptyset$, то есть

$$\mathcal{R} = \mathcal{K}[S]/\mathcal{J}\{f_1, ..., f_k\},$$

где $\mathcal{K}[S]$ — свободная $\mathcal{K}$-алгебра S, а $\mathcal{J}\{f_1, ..., f_k\}$ — идеал, порожденный операциями $f_1, ..., f_k$, рассматриваемыми как элементы алгебры $\mathcal{K}[S]$.

Каждой такой $\mathcal{K}$-алгебре $\mathcal{R}$ сопоставим $\mathcal{K}'$-алгебру $\mathcal{R}'$, по определению равную

$$\mathcal{R}' = \mathcal{K}'[S]/\mathcal{J}'\{f_1, ..., f_k\},$$

где $\mathcal{J}'\{f_1, ..., f_k\}$ — идеал, порожденный операциями $f_1, ..., f_k$, которые рассматриваются как элементы свободной $\mathcal{K}'$-алгебры $\mathcal{K}'[S]$. Стандартным образом показывается, что сопоставление $\mathcal{R} \mapsto \mathcal{R}'$ не зависит от выбора образующих в $\mathcal{R}$ и является ковариантным функтором. Этот функтор называется функтором замены класса операций.

З а м е ч а н и е 4.1. Так как $\mathcal{K}$-алгебры имеют идеалы, то можно определить спектр $Spec(\mathcal{R})$ $\mathcal{K}$-алгебры $\mathcal{R}$ как множество максимальных идеалов и ввести на множестве $Spec(\mathcal{R})$ топологию Зариского, где замкнутыми подмножествами в $Spec\ \mathcal{R}$ являются подмножества вида $N(\mathcal{J})$ =(множество максимальных идеалов, содержащих идеал $\mathcal{J}$). Далее можно было бы попытаться распространить методы и результаты алгебраической геометрии на случай $\mathcal{K}$-алгебр. Однако в данной работе в таком общем случае мы этим заниматься не будем.

5 Теорема о разложении $\mathcal{K}$-алгебр

Начиная с этого момента, под $\mathcal{K}$ понимается класс операций реляционной алгебры (пример раздела 1). Операции над отношениями в этом классе порождаются согласованиями между наборами атрибутов.

В различных системах могут использоваться не все возможные согласования (см. определение 1.1) между наборами атрибутов, а только некоторые, совокупность которых обозначается через $\mathcal{A}$. Множество согласований между наборами атрибутов A и B из класса $\mathcal{A}$ обозначается, как обычно, через $\mathcal{A}(A, B)$.

Будем предполагать, что класс $\mathcal{A}$ обладает следующими свойствами:

$\mathcal{A}1$). Если набор атрибутов A принадлежит классу $\mathcal{A}$, то тождественное согласование $id(A) : A \to A$ принадлежит $\mathcal{A}(A, A)$.

$\mathcal{A}2$). Если $\varphi_1 \in \mathcal{A}(B, A)$, $\varphi_2 \in \mathcal{A}(C, B)$, то их композиция $\varphi_1 \circ \varphi_2 \in \mathcal{A}(C, A)$.

Другими словами, свойства $\mathcal{A}1$, $\mathcal{A}2$ означают, что $\mathcal{A}$ — это подкатегория категории конечных множеств атрибутов и их согласований.

Для определения операций декартова произведения нам понадобится также следующее свойство класса $\mathcal{A}$:

$\mathcal{A}3$). Для любых наборов атрибутов A и B из класса $\mathcal{A}$ существует такой набор атрибутов $A \sqcup B$, который называется непересекающимся объединением или копроизведением наборов A и B, и такие согласования-вложения $i_1 : A \to A \sqcup B$, $i_2 : B \to A \sqcup B$ из класса $\mathcal{A}$, что $i_1(A) \cup i_2(B) = A \sqcup B$ и $i_1(A) \cap i_2(B) = \emptyset$. Если $\varphi_1 \in \mathcal{A}(A', A)$, $\varphi_2 \in \mathcal{A}(B', B)$, то согласование $\varphi_1 \sqcup \varphi_2 : A' \sqcup B' \to A \sqcup B$ принадлежит $\mathcal{A}$, где через $\varphi_1 \sqcup \varphi_2$ обозначено непересекающееся объединение согласований.

В этом разделе под классом $\mathcal{K}$ операций над отношениями понимается класс операций, удовлетворяющий условиям $\mathcal{K}1$ — $\mathcal{K}4$, порожденный операциями вида φ^* и $\underset{\varphi_1,\varphi_2}{\times}$ (см. определения 1.4, 1.5), где $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ — согласования из класса $\mathcal{A}$.

Выпишем некоторые соотношения в классе операций $\mathcal{K}$, которые нам потребуются в дальнейшем.

$C1$). Пусть $\varphi \in \mathcal{A}(A, B)$. Тогда

$$\varphi^*(\emptyset(A_1, ..., A_n; A)) = \emptyset(A_1, ..., A_n; B).$$

Это соотношение следует из определения операции φ^*.

$C2$). Пусть $id(A) : A \to A$ — тождественное согласование наборов атрибутов и $f \in \mathcal{K}(A_1, ..., A_n; A)$. Тогда $id(A)^*(f) = f$.

$C3$). Если $\varphi_1 \in \mathcal{A}(A, B)$ и $\varphi_2 \in \mathcal{A}(B, C)$, то $(\varphi_1 \circ \varphi_2)^* = \varphi_2^* \circ \varphi_1^*$.

$C4$). Если $f_i \in \mathcal{K}(A_1, ..., A_n; B)$, для $i \in I$, — произвольное множество операций класса $\mathcal{K}$, и $\varphi \in \mathcal{A}(A, B)$, то

$$\varphi^*(\bigcup_{i \in I} f_i) = \bigcup_{i \in I} \varphi^*(f_i).$$

Пусть $f_1, f_2 \in \mathcal{K}(A_1, ..., A_n; B)$. Будем писать, что $f_1 \subset f_2$, если $f_1 \cap f_2 = f_1$ или $f_1 \cup f_2 = f_2$.

Из предыдущего соотношения вытекает следующее свойство:

$C4'$). Если $f_1, f_2 \in \mathcal{K}(A_1, ..., A_n; B)$, где $f_1 \subset f_2$ и $\varphi \in \mathcal{A}(A, B)$, то $\varphi^*(f_1) \subset \varphi^*(f_2)$.

Действительно, так как $f_1 \subset f_2$, то $f_2 = f_1 \cup (f_2 \setminus f_1)$. Согласно соотношению $C4$, имеем $\varphi_*(f_2) = \varphi^*(f_1 \cup (f_2 \setminus f_1)) = \varphi^*(f_1) \cup \varphi^*(f_2 \setminus f_1)$, то есть $\varphi^*(f_1) \subset \varphi^*(f_2)$.

Следующие соотношения содержат операцию $\underset{\varphi_1,\varphi_2}{\times} \in \mathcal{K}(A, B; C)$ (см. определение 1.7), где $\varphi_1 \in \mathcal{A}(A, C)$ и $\varphi_2 \in \mathcal{A}(B, C)$ и образ отображения $(\varphi_1 \cup \varphi_2) : A \cup B \to C$ совпадает со всем C.

Из определения 1.7 вытекают следующие два соотношения.

$C5$). Если $f_1 \in \mathcal{K}(A_1, ..., A_n; A)$, $f_2 \in \mathcal{K}(A_1, ..., A_n; B)$, $\varphi_1 \in \mathcal{A}(A, C)$ и $\varphi_2 \in \mathcal{A}(B, C)$, то $\varphi_1^*(f_1 \underset{\varphi_1,\varphi_2}{\times} f_2) \subset f_1$ и $\varphi_2^*(f_1 \underset{\varphi_1,\varphi_2}{\times} f_2) \subset f_2$.

$C6$). Пусть $f_1, f_2, \varphi_1, \varphi_2$ такие же, как в соотношении $C5$ и $f \in \mathcal{K}(A_1, ..., A_n;)$. Тогда, если $\varphi_1^*(f) \subset f_1$ и $\varphi_2^*(f) \subset f_2$, то $f \subset f_1 \underset{\varphi_1,\varphi_2}{\times} f_2$.

$C7$). Пусть $\varphi_1 \in \mathcal{A}(A, C)$, $\varphi_2 \in \mathcal{A}(B, C)$ и $f \in \mathcal{K}(A_1, ..., A_n; B)$. Тогда

$$\emptyset(A_1, ..., A_n; A) \underset{\varphi_1,\varphi_2}{\times} f = \emptyset(A_1, ..., A_n; C).$$

Это равенство проверяется непосредственно, по определению 1.4 равенства между операциями, подстановкой любых отношений.

$C8$). Пусть $f_1, f_2 \in \mathcal{K}(A_1, ..., A_n; A)$, $f_3 \in \mathcal{K}(A_1, ..., A_n; B)$, φ_1, φ_2 — те же, что и прежде. Тогда

$$(f_1 \cup f_2) \underset{\varphi_1,\varphi_2}{\times} f_3 = (f_1 \underset{\varphi_1,\varphi_2}{\times} f_3) \cup (f_2 \underset{\varphi_1,\varphi_2}{\times} f_3).$$

Это равенство проверяется так же, как и равенство $C7$.

$C9$). Пусть $f \in \mathcal{K}(A_1, ..., A_n; B)$, $\varphi \in \mathcal{A}(A, B)$ и $id(B) : B \to B$ — тождественное отображение. Тогда

$$\varphi^*(f) \underset{\varphi, id(B)}{\times} f = f.$$

Действительно, согласно соотношениям $C2$ и $C5$, имеем:

$$\varphi^*(f) \underset{\varphi, id(B)}{\times} f = id_B^*(\varphi^*(f) \underset{\varphi, id(B)}{\times} f) \subset f.$$

С другой стороны, так как $\varphi_*(f) \subset \varphi_*(f)$ и $id_B^*(f) \subset f$, то по свойству $C6$ имеем $f \subset \varphi^*(f) \underset{\varphi, id(B)}{\times} f$, что доказывает равенство $C9$.

Пусть $i_1 : A \to A \sqcup B$, $i_2 : B \to A \sqcup B$ — естественные вложения в копроизведение наборов атрибутов. В этом случае, если $f_1 \in \mathcal{K}(A_1, ..., A_n; A)$ и $f_2 \in \mathcal{K}(A_1, ..., A_n; B)$, то операцию $f_1 \underset{i_1, i_2}{\times} f_2$ будем обозначать через $f_1 \times f_2$ и называть декартовым произведением операций f_1 и f_2.

$C10$). Пусть $f_1 \in \mathcal{K}(A_1, ..., A_n; A)$, $f_2 \in \mathcal{K}(A_1, ..., A_n; B)$ и $\varphi_1 \in \mathcal{A}(A', A)$, $\varphi_2 \in \mathcal{A}(B', B)$. Через $\varphi_1 \sqcup \varphi_2 : A' \sqcup B' \to A \sqcup B$ обозначается копроизведение отображений φ_1 и φ_2. Тогда

$$(\varphi_1 \sqcup \varphi_2)^*(f_1 \times f_2) = \varphi_1^*(f_1) \times \varphi_2^*(f_2).$$

$C11$). Для любой операции f выполняется равенство $i_1^*(f \times f) = f$, где $i_1 : A \to A \sqcup A$ — вложение одного слагаемого в копроизведение $A \sqcup A$.

Эти равенства непосредственно проверяются по определению 1.2 равенства между операциями подстановкой произвольных отношений.

Перейдем к изучению $\mathcal{K}$-алгебр $\mathcal{R}$ с конечным числом образующих. В таких алгебрах каждый элемент представляется значений некоторой операции от образующих (см. утверждение 3.8). Поэтому равенства между операциями (например $C1$ — $C11$) влекут соответствующие равенства между элементами $\mathcal{K}$-алгебр $\mathcal{R}$, где вместо произвольных операций берутся произвольные элементы $\mathcal{K}$-алгебры $\mathcal{R}$.

Рассмотрим $\mathcal{R}(A)$ для некоторого набора атрибутов A. Согласно определению $\mathcal{K}$-алгебры, $\mathcal{R}$ — булева алгебра с бесконечными пересечениями и объединениями.

Обозначим через $At\mathcal{R}(A)$ множество атомов булевой алгебры $\mathcal{R}(A)$, то есть множество минимальных непустых элементов $\mathcal{R}(A)$. Если $R \in \mathcal{R}(A)$, через $At(R)$ обозначим множество атомов, содержащихся в R.

Известно, что $R = \bigcup\limits_{t \in At(R)} t$, и булева алгебра $\mathcal{R}(A)$ изоморфна алгебре всех подмножеств множества $At\mathcal{R}(A)$. Если $j : \mathcal{R}(A) \to \mathcal{R}'(A)$ — гомоморфизм булевых алгебр, (напомним, что здесь рассматриваются булевы алгебры без единиц, у которых вместо унарной операции дополнения рассматривается бинарная операция разности) то ему соответствует частичное отображение множеств

$$At(j) : At\mathcal{R}'(A) \to At\mathcal{R}(A),$$

заданное формулой: $At(j)(t') \stackrel{def}{=} t$, если $t' \in At(j(t))$. И, наоборот, если $At(j) : At\mathcal{R}'(A) \to \mathcal{R}(A)$ — произвольное отображение множеств, то оно индуцирует гомоморфизм булевых алгебр

$$j : \mathcal{R}(A) \to \mathcal{R}'(A),$$

который задается соотношением $j(R) \stackrel{def}{=} (At(j))^{-1}(At(R))$, для любого $R \in \mathcal{R}(A)$.

Отображение $At(j)$ всюду определено тогда и только тогда, когда отображение j единицу булевой алгебры переводит в единицу.

Отображение $At(j)$ — вложение тогда и только тогда, когда отображение j является отображением на все $\mathcal{R}'(A)$

Утверждение 5.1. Пусть $\varphi : A \to B$ — согласование наборов атрибутов, $\mathcal{R}$ — $\mathcal{K}$-алгебра и $t \in At\mathcal{R}(B)$. Тогда $\varphi^*(t)$ — атом булевой алгебры $\mathcal{R}(A)$.

Доказательство. Покажем, что $\varphi^*(t) \neq \emptyset$. Если бы $\varphi^*(t) = \emptyset$, то $\varphi^*(t) \underset{\varphi, id(B)}{\times} t = \emptyset \underset{\varphi, id(B)}{\times} t = \emptyset$, согласно соотношению $C7$. С другой стороны, соотношение $C9$ дает: $\varphi^*(t) \underset{\varphi, id(B)}{\times} t = t$. Отсюда, $t = \emptyset$, что противоречит условию атомарности t. Покажем, теперь, что $\varphi^*(t)$ — минимальный элемент булевой алгебры. Пусть $\varphi^*(t) = r_1 \cup r_2$ и $r_1 \cap r_2 = \emptyset$. Тогда, по свойству $C9$, имеем $t = \varphi^*(t) \underset{\varphi, id(B)}{\times} t = (r_1 \cup r_2) \underset{\varphi, id(B)}{\times} t$. Далее, свойство $C8$ дает равенство $t = (r_1 \cup r_2) \underset{\varphi, id(B)}{\times} t = (r_1 \underset{\varphi, id(B)}{\times} t) \cup (r_2 \underset{\varphi, id(B)}{\times} t)$. Так как t — атомарный элемент в $\mathcal{R}(B)$, то t совпадает с одним из элементов правой части последнего выражения. Пусть, для определенности, $t = r_1 \underset{\varphi, id(B)}{\times} t$. Тогда $\varphi^*(t) = \varphi^*(r_1 \underset{\varphi, id(B)}{\times} t)$, но, согласно свойству $C5$, $\varphi^*(r_1 \underset{\varphi, id(B)}{\times} t) \subset r_1$. Отсюда, $\varphi^*(t) \subset r_1$ и $r_2 = \emptyset$.

Итак, для любого $\varphi \in \mathcal{A}(A, B)$ операция φ^* определяет отображение:

$$\varphi^* : At\mathcal{R}(B) \to At\mathcal{R}(A).$$

Если $R \in \mathcal{R}(B)$ и $R \neq \emptyset$, то $R = \bigcup\limits_{t \in At(R)} t$ и, согласно свойству $C4$,

$$\varphi^*(R) = \bigcup_{t \in At(R)} \varphi^*(t),$$

а по свойству $C1$, $\varphi^*(\emptyset) = \emptyset$. То есть $\varphi^*(R)$ — это образ подмножества $At(R) \subset At\mathcal{R}(B)$ при отображении $\varphi^* : At\mathcal{R}(B) \to At\mathcal{R}(A)$.

З а м е ч а н и е 5.1. Так как операция φ^* обладает свойствами $C2$ и $C3$, то $At\mathcal{R}$ представляет собой диаграмму множеств над категорией $\mathcal{A}$, в которой каждому объекту A сопоставляется множество $At\mathcal{R}(A)$, а каждому морфизму $\varphi : A \to B$ — отображение множеств $\varphi^* : At\mathcal{R}(B) \to At\mathcal{R}(A)$. Причем, $id(A)^* : At\mathcal{R}(A) \to At\mathcal{R}(A)$ — тождественное отображение множеств, и, если $\varphi_1 \in \mathcal{A}(A, B)$, $\varphi_2 \in \mathcal{A}(B, C)$, то $(\varphi_2 \circ \varphi_1)^* = \varphi_1^* \circ \varphi_2^*$.

У т в е р ж д е н и е 5.2. Пусть $\varphi_1 : A \to C$, $\varphi_2 : B \to C$ — согласования наборов атрибутов такие, что $\varphi_1 \sqcup \varphi_2 : A \sqcup B \to C$ — отображение на все C. Пусть $R_1 \in \mathcal{R}(A)$, $R_2 \in \mathcal{R}(B)$. Тогда $At(R_1 \underset{\varphi_1, \varphi_2}{\times} R_2)$ состоит в точности из тех атомов $t \in At\mathcal{R}(C)$, для которых $\varphi_1^*(t) \in At(R_1)$ и $\varphi_2^*(t) \in At(R_2)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $t \in At(R_1 \underset{\varphi_1, \varphi_2}{\times} R_2)$, то $t \subset R_1 \underset{\varphi_1, \varphi_2}{\times} R_2$. Из свойств $C4'$ и $C5$ имеем:

$$\varphi_1^*(t) \subset \varphi_1^*(R_1 \underset{\varphi_1, \varphi_2}{\times} R_2) \subset R_1, \quad \varphi_2^*(t) \subset \varphi_2^*(R_1 \underset{\varphi_1, \varphi_2}{\times} R_2) \subset R_2.$$

Так как t — атом, то, согласно утверждению 5.1, $\varphi_1^*(t)$ и $\varphi_2^*(t)$ — также атомы. Отсюда, $\varphi_1^*(t) \in At(R_1)$ и $\varphi_2^*(t) \in At(R_2)$. Обратно, пусть $t \in At\mathcal{R}(C)$ и $\varphi_1^*(t) \in At(R_1)$, $\varphi_2^*(t) \in At(R_2)$. Тогда $\varphi_1^*(t) \subset R_1$ и $\varphi_2^*(t) \subset R_2$, и по свойству $C6$ получим: $t \subset R_1 \underset{\varphi_1, \varphi_2}{\times} R_2$. Отсюда, $t \in At(R_1 \underset{\varphi_1, \varphi_2}{\times} R_2)$.

Из утверждения 5.2 следует, что

$$At(R_1 \underset{\varphi_1,\varphi_2}{\times} R_2) = (\varphi_1^*)^{-1}(At(R_1)) \cap (\varphi_2^*)^{-1}(At(R_2)).$$

О п р е д е л е н и е 5.1. Семейство подмножеств $M(A) \subset At\mathcal{R}(A)$ для всех наборов атрибутов $A \in \mathcal{A}$ называется идеальной поддиаграммой диаграммы $At\mathcal{R}$, если выполняются следующие условия:

1). если $t \in M(B)$ и $\varphi \in \mathcal{A}(A, B)$, то $\varphi^*(t) \in M(A)$;

2). если $t \in At\mathcal{R}(B)$ и $\varphi^*(t) \in M(A)$, то $t \in M(B)$.

У т в е р ж д е н и е 5.3. Пусть $At\mathcal{R}$ — диаграмма множеств, соответствующая $\mathcal{K}$-алгебре $\mathcal{R}$, и M — идеальная поддиаграмма диаграммы $At\mathcal{R}$. Тогда существует подалгебра $\mathcal{R}M \subset \mathcal{R}$ такая, что $At\mathcal{R}M(A) = M(A)$ и $\mathcal{R}M(A)$ изоморфна булевой алгебре всех подмножеств множества $M(A)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $\mathcal{R}M(A) = \{R : R \in \mathcal{R}(A), At(R) \subset M(A)\}$. Очевидно, что $\mathcal{R}M(A)$ — подалгебра булевой алгебры $\mathcal{R}$. Из утверждения 5.1 и определения 5.1 идеальности M следует, что, если $R \in \mathcal{R}M(B)$, $\varphi \in \mathcal{A}(A, B)$, то $\varphi^*(R) \in \mathcal{R}M(A)$. Аналогично, из утверждения 5.2 следует, что, если $\varphi_1 \in \mathcal{A}(A, C)$, $\varphi_2 \in \mathcal{A}(B, C)$ и $R_1 \in \mathcal{R}M(A)$, $R_2 \in \mathcal{R}M(B)$, то $R_1 \underset{\varphi_1,\varphi_2}{\times} R_2 \in \mathcal{R}M(C)$. Так как все операции являются композициями операций φ^*, $\underset{\varphi_1,\varphi_2}{\times}$ и теоретико множественных операций, то $\mathcal{R}M$ — подалгебра $\mathcal{R}$.

У т в е р ж д е н и е 5.4. Пусть $\mathcal{R}M$ — алгебра предыдущего утверждения. Тогда отображение $j : \mathcal{R} \to \mathcal{R}M$, сопоставляющее элементу $R \in \mathcal{R}(A)$ элемент $R \cap M(A) \in \mathcal{R}M$, является $\mathcal{K}$-гомоморфизмом.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что $j : \mathcal{R}(A) \to \mathcal{R}M(A)$ — гомоморфизм булевых алгебр. Так как любая операция из класса $\mathcal{K}$ является композицией операций φ^*, $\underset{\varphi_1,\varphi_2}{\times}$ и теоретико множественных операций, то осталось показать, что

$$j(\varphi^*(R)) = \varphi^*(j(R)) \text{ и } j(R_1 \underset{\varphi_1,\varphi_2}{\times} R_2) = j(R_1) \underset{\varphi_1,\varphi_2}{\times} j(R_2).$$

Для доказательства первого равенства рассмотрим $At(j(\varphi^*(R))$. Так как, согласно равенству $C4$, $\varphi^*(R) = \bigcup_{t \in At(R)} \varphi^*(t)$ и j — гомоморфизм булевых алгебр, то $j(\varphi^*(R)) = \bigcup_{t \in At(R)} j(\varphi^*(t))$. По определению отображения j имеем: $j(\varphi^*(t)) = \varphi^*(t) \cap M(A)$.

Так как $\varphi^*(t)$, согласно утверждению 5.1, это атом, то

$$At(j(\varphi^*(R)) = \{\varphi^*(t) : t \in At(R) \text{ и } \varphi^*(t) \in M(A)\}.$$

Но, если $\varphi^*(t) \in M(A)$, то из определения идеальности M следует, что $t \in M(B)$. Отсюда,

$$At(j(\varphi^*(R)) = \{\varphi^*(t) : t \in At(R) \text{ и } t \in M(B)\} = \{\varphi^*(t) : t \in At(j(R))\}.$$

Окончательно имеем,

$$j(\varphi^*(R)) = \bigcup_{t' \in At(j(\varphi^*(R)))} t' = \bigcup_{t \in At(j(R))} \varphi^*(t) = \varphi^*(\bigcup_{t \in At(j(R))} t) = \varphi^*(j(R)).$$

Для доказательства коммутативности j с операцией $\underset{\varphi_1,\varphi_2}{\times}$ рассмотрим множество атомов $At(j(R_1 \underset{\varphi_1,\varphi_2}{\times} R_2))$. По определению отображения j и из утверждения 5.2 следует, что

$$At(j(R_1 \underset{\varphi_1,\varphi_2}{\times} R_2)) = \{t : t \in M(C),\ \varphi_1^*(t) \in At(R_1), \varphi_2^*(t) \in At(R_2)\}.$$

Так как M — идеальная поддиаграмма, то условия $t \in M(C)$ и $\varphi_1^*(t) \in M(A), \varphi_2^*(t) \in M(B)$ эквивалентны. Отсюда,

$$At(j(R_1 \underset{\varphi_1,\varphi_2}{\times} R_2)) = \{t : t \in At\mathcal{R}(C), \varphi_1^*(t) \in At(j(R_1)), \varphi_2^*(t) \in At(j(R_2))\}$$

и из утверждения 5.2 имеем:

$$j(R_1 \underset{\varphi_1,\varphi_2}{\times} R_2) = j(R_1) \underset{\varphi_1,\varphi_2}{\times} j(R_2),$$

что завершает доказательство утверждения 5.4.

Положим $M'(A) = At\mathcal{R}(A) \setminus M(A)$. Очевидно, что, если M — идеальная поддиаграмма, то и M' — идеальная поддиаграмма.

У т в е р ж д е н и е 5.5. Гомоморфизмы $j_M : \mathcal{R} \to \mathcal{R}M$ и $j_{M'} : \mathcal{R} \to \mathcal{R}M'$ представляют $\mathcal{K}$-алгебру $\mathcal{R}$ в виде суммы $\mathcal{R} = \mathcal{R}M \oplus \mathcal{R}M'$.

Действительно, любой элемент $R \in \mathcal{R}(A)$ представляется в виде пары $(R \cap M(A), R \cap M'(A)) = (j_M(R), j_{M'}(R))$ так, что $R = j_M(R) \cup j_{M'}(R)$ и $j_M(R) \cap j_{M'}(R) = \emptyset$. Наоборот, паре $(R_M, R_{M'}) \in (\mathcal{R}M \oplus \mathcal{R}M')(A)$ сопоставляется элемент $R = R_M \cup R_{M'}$, так как $R_M \in \mathcal{R}M(A) \subset \mathcal{R}$ и $R_{M'} \in$

$\mathcal{R}M'(A) \subset \mathcal{R}$. Легко видеть, что эта пара отображений представляют собой взаимно обратные изоморфизмы $\mathcal{K}$-алгебр $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}M \oplus \mathcal{R}M'$.

С л е д с т в и е 5.6. Если M — идеальная поддиаграмма диаграммы $At\mathcal{R}$, то $\mathcal{R}M \subset \mathcal{R}$ — идеал алгебры $\mathcal{R}$.

Пусть $\mathcal{J} \subset \mathcal{R}$ — идеал $\mathcal{K}$-алгебры $\mathcal{R}$. Обозначим через $At\mathcal{J}(A)$ подмножество в $At\mathcal{R}(A)$, состоящее из всех атомов, содержащихся в $\mathcal{J}(A)$.

У т в е р ж д е н и е 5.7. Для произвольного идеала $\mathcal{J} \subset \mathcal{R}$ поддиаграмма $At\mathcal{J}$ идеальна в $At\mathcal{R}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $t \in At\mathcal{J}(B)$, то есть t — атом и $t \in \mathcal{J}(B)$. Тогда, согласно утверждению 3.1, $\varphi^*(t) \in \mathcal{J}(A)$, так как равенство $C1$ дает $\varphi^*(\emptyset) = \emptyset$. Отсюда, если $t \in At\mathcal{J}(B)$, то $\varphi^*(t) \in At\mathcal{J}(A)$. Пусть, теперь, $\varphi^*(t) \in At\mathcal{J}(A)$, то есть $\varphi^*(t) \in \mathcal{J}(A)$ и $\varphi^*(t)$ — атом. Из равенства $C9$ следует, что $\varphi^*(t) \underset{\varphi, id(B)}{\times} t = t$. Так как согласно равенству $C7$ выполняется соотношение $\emptyset \underset{\varphi, id(B)}{\times} t = \emptyset$, то из утверждения 3.1 следует, что $t = \varphi^*(t) \underset{\varphi, id(B)}{\times} t \in \mathcal{J}(B)$.

Следствие 5.6 и утверждение 5.7 дают взаимно однозначное соответствие между идеалами $\mathcal{K}$-алгебры $\mathcal{R}$ и идеальными поддиаграммами диаграммы $At\mathcal{R}$.

Пусть $\mathcal{R}$ — произвольная $\mathcal{K}$-алгебра. Из определения 5.1 легко выводится, что пересечение любого множества идеальных поддиаграмм диаграммы $At\mathcal{R}$ — идеальная поддиаграмма, объединение любого множества идеальных поддиаграмм — идеальная поддиаграмма и разность двух идеальных поддиаграмм — идеальная поддиаграмма. То есть совокупность всех идеальных поддиаграмм диаграммы $At\mathcal{R}$ образуют полную булеву алгебру.

У т в е р ж д е н и е 5.8. Пусть $R_1 \in \mathcal{R}(A_1), ..., R_n \in \mathcal{R}(A_n)$ — множество образующих $\mathcal{K}$-алгебры $\mathcal{R}$; M — идеальная поддиаграмма диаграммы $At\mathcal{R}$ такая, что $M(A_i) \cap At(R_i) = \emptyset$, для $i = 1, ..., n$. Тогда $M = \emptyset$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно утверждению 5.5, $\mathcal{K}$-алгебра $\mathcal{R}$ представляется в виде $\mathcal{R} = \mathcal{R}M \oplus \mathcal{R}M'$, где M' — дополнительная к M диаграмма. Из следствия 5.6 вытекает, что $\mathcal{R}M' \subset \mathcal{R}$ — идеал $\mathcal{K}$-алгебры $\mathcal{R}$. По условию $\mathcal{R}M'$ содержит образующие R_i, для $i = 1, ..., n$. Отсюда, $\mathcal{R}M' = \mathcal{R}$ и $M = \emptyset$.

С л е д с т в и е 5.9. Пусть $R_1 \in \mathcal{R}(A_1), ..., R_n \in \mathcal{R}(A_n)$ — множество образующих $\mathcal{K}$-алгебры $\mathcal{R}$; M_1 и M_2 идеальные поддиаграммы $At\mathcal{R}$.

Тогда, если $M_1(A_i) \cap R_i = M_2(A_i) \cap R_i$, для $i = 1, ..., n$, то $M_1 = M_2$.

Для доказательства нужно рассмотреть симметрическую разность M_1 и M_2 и применить утверждение 5.8

С л е д с т в и е 5.10. Любой идеал $\mathcal{K}$-алгебры $\mathcal{R}$ с n образующими порождается n элементами.

Действительно, пусть $\mathcal{J} \subset \mathcal{R}$ — идеал и $R_i \in \mathcal{R}(A_i)$, $i = 1, ..., n$ — образующие $\mathcal{K}$-алгебры $\mathcal{R}$. Согласно утверждению 5.7 поддиаграмма $At\mathcal{J}$ идеальна в $At\mathcal{R}$. Рассмотрим идеал $\mathcal{J}[J_1, ...J_n]$, порожденный элементами $J_i = At\mathcal{J}(A_i) \cap R_i$, для $i = 1, ..., n$. Так как $J_i \in \mathcal{J}$, то $\mathcal{J}[J_1, ...J_n] \subset \mathcal{J}$. С другой стороны, применяя следствие 5.9, получим $At\mathcal{J}[J_1, ...J_n] = At\mathcal{J}$. Отсюда, $\mathcal{J}[J_1, ...J_n] = \mathcal{J}$.

Рассмотрим булеву алгебру $\mathcal{J}\mathcal{R}$ всех идеальных поддиаграмм диаграммы $At\mathcal{R}$. Через $Spec\mathcal{R}$ обозначим множество атомов булевой $\mathcal{J}\mathcal{R}$.

О п р е д е л е н и е 5.2. $\mathcal{K}$-алгебра $\mathcal{R}$ называется неприводимой, если она не представляется в виде суммы своих нетривиальных подалгебр, то есть $\mathcal{R} \neq \mathcal{R}_1 \oplus \mathcal{R}_2$, где $\mathcal{R}_1 \neq \emptyset$ и $\mathcal{R}_2 \neq \emptyset$.

Из утверждений 5.7 и 5.5 следует, что, если $\mathcal{R}$ — неприводимая $\mathcal{K}$-алгебра, то в ней нет собственных идеалов.

Для изучения строения неприводимых $\mathcal{K}$-алгебр нам понадобится следующее понятие.

Пусть $R \in \mathcal{R}$ — произвольный элемент $\mathcal{K}$-алгебры $\mathcal{R}$. Для каждого набора атрибутов $A \in \mathcal{A}$ рассмотрим множество $N_R(A) = \{R_1 : R_1 \in \mathcal{R}(A) \text{ и } R \times R_1 = \emptyset\}$.

У т в е р ж д е н и е 5.11. Для любого элемента $R \in \mathcal{R}(C)$ подмножества $N_R(A)$, где $A \in \mathcal{A}$, образуют идеал N_R в $\mathcal{K}$-алгебре $\mathcal{R}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $R_i \in N_R(A)$, для $i \in I$. Рассмотрим множество атомов элемента $R \times (\bigcup_{i \in I} R_i)$. Согласно утверждению 5.2, t — атом $R \times (\bigcup_{i \in I} R_i)$ тогда и только тогда, когда $i_1^*(t) \in At(R)$ и $i_2^*(t) \in At(\bigcup_{i \in I} R_i)$, где $i_1 : C \to C \sqcup A$, $i_2 : A \to C \sqcup A$. Так как $At(\bigcup_{i \in I} R_i) = \bigcup_{i \in I} At(R_i)$, то $i_2^*(t) \in At(R_i)$, для некоторого $i \in I$. Тогда из утверждения 5.2 следует, что $t \in At(R \times R_i)$, что противоречит условию $R \times R_i = \emptyset$. Отсюда следует равенство $R \times (\bigcup_{i \in I} R_i) = \emptyset$ или $\bigcup_{i \in I} R_i \in N_R(A)$. Аналогично показывается, что $\bigcap_{i \in I} R_i \in N_R(A)$ и

$R_1 \setminus R_2 \in N_R(A)$, если $R_1, R_2 \in N_R(A)$. Кроме того, если $R_1 \in N_R(A)$ и R' — произвольный элемент $\mathcal{R}(A)$, то $R_1 \cap R' \in N_R(A)$. Таким образом доказывается, что $N_R(A)$ — идеал булевой алгебры $\mathcal{R}(A)$. Для завершения доказательства нужно показать, что $At(N_R(A))$ — идеальная поддиаграмма диаграммы $At\mathcal{R}$ и воспользоваться следствием 5.6. Пусть $\varphi \in \mathcal{A}(A;B)$ и $t \in At(N_R(B))$. Рассмотрим $R \times \varphi^*(t)$. Согласно равенствам $C10$ и $C1$ имеем, $R \times \varphi^*(t) = (id(C) \cup \varphi)^*(R \times t) = (id(C) \cup \varphi)^*(\emptyset) = \emptyset$. То есть $\varphi^*(t) \in At(N_R(A))$. Пусть, теперь, $t \in At\mathcal{R}(B)$ и $\varphi^*(t) \in At(N_R(A))$. Рассмотрим $(id(C) \cup \varphi)^*(R \times t)$. Применяя равенство $C10$, получим $(id(C) \cup \varphi)^*(R \times t) = R \times \varphi^*(t) = \emptyset$. Отсюда, $R \times t = \emptyset$, так как, если бы $R \times t$ было непусто, то и $(id(C) \cup \varphi)^*(R \times t) = \bigcup\limits_{t' \in At(R \times t)} (id(C) \cup \varphi)^*(t')$ было бы непусто. Таким образом, $At(N_R)$ удовлетворяет определению 5.1 идеальной поддиаграммы.

Утверждение 5.12. $\mathcal{K}$-алгебра $\mathcal{R}$ неприводима тогда и только тогда, когда не существует непустых элементов R_1 и $R_2 \in \mathcal{R}$ таких, что декартово произведение $R_1 \times R_2 = \emptyset$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{R}$ — неприводимая $\mathcal{K}$-алгебра и R_1 — произвольный непустой ее элемент. Рассмотрим идеал $N_{R_1} \subset \mathcal{R}$. Так как согласно равенству $C11$ $\quad i_1^*(R_1 \times R_1) = R_1$ непусто, то $R_1 \times R_1 \neq \emptyset$. Отсюда, $R_1 \notin N_{R_1}$. В неприводимой $\mathcal{K}$-алгебре $\mathcal{R}$ нет собственных идеалов и $N_{R_1} \neq \mathcal{R}$, поэтому $N_{R_1} = \emptyset$. То есть $R_1 \times R_2 \neq \emptyset$ для любых непустых элементов R_1 и R_2.

Обратно, пусть $\mathcal{R}$ — приводима, то есть $\mathcal{R} = \mathcal{R}' \oplus \mathcal{R}''$ и $\mathcal{R}' \neq \emptyset$ и $\mathcal{R}'' \neq \emptyset$. Тогда существуют непустые элементы $R' \in \mathcal{R}'$ и $R'' \in \mathcal{R}''$. Рассмотрим элементы $\mathcal{R} = \mathcal{R}' \oplus \mathcal{R}''$ вида $R_1 = (R', \emptyset)$ и $R_2 = (\emptyset, R'')$. Они непусты и

$$R_1 \times R_2 = (R_1, \emptyset) \times R_2(\emptyset, R_2) = (R_1 \times \emptyset,\ \emptyset \times R_2) = \emptyset.$$

Следствие 5.13. Подалгебра $\mathcal{R}_1 \subset \mathcal{R}$ неприводимой $\mathcal{K}$-алгебры $\mathcal{R}$ — неприводима.

Следствие 5.14. $\mathcal{K}$-алгебра неприводима тогда и только тогда, когда для любых непустых элементов $R_1, R_2 \in \mathcal{R}$ имеется равенство $i_1^*(R_1 \times R_2) = R_1$, где i_1 — естественное вложение, определяющее декартово произведение.

Доказательство. Действительно, если для любых непустых элементов $R_1, R_2 \in \mathcal{R}$ имеется равенство $i_1^*(R_1 \times R_2) = R_1 \neq \emptyset$, то и $R_1 \times R_2 \neq \emptyset$, то есть в $\mathcal{R}$ нет делителей пустого элемента. Тогда из утверждения 5.12 вытекает, что $\mathcal{R}$ — неприводима. Обратно, пусть $\mathcal{R}$ неприводима и $R_1, R_2 \in \mathcal{R}$ — непустые ее элементы. Покажем, что элемент $(R_1 \setminus i_1^*(R_1 \times R_2)) \times R_2 = \emptyset$. Действительно, так как $(R_1 \setminus i_1^*(R_1 \times R_2)) \times R_2 \subset R_1 \times R_2$, то, согласно свойству $C4'$, имеем:

$$i_1^*[(R_1 \setminus i_1^*(R_1 \times R_2)) \times R_2] \subseteq i_1^*(R_1 \times R_2).$$

С другой стороны, из свойства $C5$ следует, что

$$i_1^*[(R_1 \setminus i_1^*(R_1 \times R_2)) \times R_2] \subseteq R_1 \setminus i_1^*(R_1 \times R_2).$$

Отсюда $i_1^*[(R_1 \setminus i_1^*(R_1 \times R_2)) \times R_2] = \emptyset$ и, следовательно, $(R_1 \setminus i_1^*(R_1 \times R_2)) \times R_2 = \emptyset$. Так как $\mathcal{R}$ — неприводима, то согласно утверждению 5.12, в ней нет делителей пустого элемента, поэтому $R_1 \setminus i_1^*(R_1 \times R_2) = \emptyset$. Так как $i_1^*(R_1 \times R_2) \subset R_1$, то $i_1^*(R_1 \times R_2) = R_1$.

Т е о р е м а 5.15. Пусть $\mathcal{R}$ — произвольная $\mathcal{K}$-алгебра с конечным множеством образующих. Тогда $\mathcal{R}$ представляется в виде прямой суммы неприводимых $\mathcal{K}$-алгебр $\mathcal{R} = \bigoplus\limits_{s \in Spec\mathcal{R}} \mathcal{R}_s$ по множеству $Spec\mathcal{R}$ — атомов булевой алгебры идеальных поддиаграмм диаграммы $At\mathcal{R}$. Если $j : \mathcal{R} \to \mathcal{R}'$ — гомоморфизм $\mathcal{K}$-алгебр, то он индуцирует естественное частичное отображение

$$j : Spec\mathcal{R}' \to Spec\mathcal{R}$$

и множество гомоморфизмов-вложений

$$j_{s'} : \mathcal{R}_{j(s')} \to \mathcal{R}'_{s'},$$

для всех $s' \in Spec\mathcal{R}'$, для которых определено отображение j так, что $j(R) = j(\bigoplus\limits_{s \in Spec\mathcal{R}} R_s) = \bigoplus\limits_{s' \in Spec\mathcal{R}'} j_{s'}(R_{j(s')})$, где R — произвольный элемент $\mathcal{R}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим булеву алгебру идеальных поддиаграмм $\mathcal{J}(\mathcal{R})$ диаграммы $At\mathcal{R}$. Пусть $Spec\mathcal{R}$ — множество атомов булевой алгебры $\mathcal{J}(\mathcal{R})$. Тогда для каждой поддиаграммы $s \in Spec\mathcal{R}$ алгебра $\mathcal{R}_s$ неприводима, так как в противном случае, согласно утверждениям 5.7 и 5.5, поддиаграмма s не являлась бы атомом булевой алгебры $\mathcal{J}(\mathcal{R})$.

Так как $At\mathcal{R} = \bigcup\limits_{s \in Spec\mathcal{R}} s$, то любой элемент $R \in \mathcal{R}(A)$ единственным образом представляется в виде $R = \bigcup\limits_{s \in Spec\mathcal{R}} R_s$, где $R_s \in \mathcal{R}_s(A)$ и определяются по формуле $R_s = R \cap s(A)$. Очевидно, что операции над элементами $R = \bigcup\limits_{s\in Spec\mathcal{R}} R_s$ выполняются покоординатно. Отсюда $\mathcal{R} = \bigoplus\limits_{s\in Spec\mathcal{R}} \mathcal{R}_s$

Пусть $j : \mathcal{R} \to \mathcal{R}'$ — гомоморфизм $\mathcal{K}$-алгебр. Тогда $\mathcal{R} = \bigoplus\limits_{s\in Spec\mathcal{R}} \mathcal{R}_s$ и $\mathcal{R}' = \bigoplus\limits_{s'\in Spec\mathcal{R}'} \mathcal{R}'_{s'}$. Для каждой пары элементов $s \in Spec\mathcal{R}$ и $s' \in Spec\mathcal{R}'$ рассмотрим сквозной гомоморфизм

$$i_{s,s'} : \mathcal{R}_s \subset \mathcal{R} \xrightarrow{j} \mathcal{R}' \to \mathcal{R}'_{s'},$$

где крайние гомоморфизмы — это естественные вложения и проекции прямой суммы. Так как $\mathcal{R}_s$ — неприводимая $\mathcal{K}$-алгебра и в ней нет идеалов, то $i_{s,s'}$ — либо вложение, либо отображение в пустой элемент $\mathcal{R}'_s$.

Пусть $s_1 \neq s_2 \in Spec\mathcal{R}$. Покажем, что для любого элемента $s' \in Spec\mathcal{R}'$ оба гомоморфизма $i_{s_1,s'}$ и $i_{s_2,s'}$ не могут быть вложениями. Для этого рассмотрим сквозной гомоморфизм

$$i_{s_1 s_2,s'} : \mathcal{R}_{s_1} \oplus \mathcal{R}_{s_2} \subset \mathcal{R} \xrightarrow{j} \mathcal{R}' \to \mathcal{R}'_{s'},$$

где крайние гомоморфизмы — естественное вложение и проекция прямой суммы. Очевидно, что ограничение гомоморфизма $i_{s_1 s_2,s'}$ на $\mathcal{R}_{s_1}$ и $\mathcal{R}_{s_2}$ совпадает, соответственно, с $i_{s_1 s'}$ и $i_{s_2 s'}$. Возьмем непустые элементы вида $(R_1, \emptyset)$ и $(\emptyset, R_2)$ из $\mathcal{R}_{s_1} \oplus \mathcal{R}_{s_2}$, где $R_1 \in \mathcal{R}_{s_1}$ $R_2 \in \mathcal{R}_{s_2}$. Так как декартово произведение $(R_1, \emptyset) \times (\emptyset, R_2) = (R_1 \times \emptyset, \emptyset \times R_2) = \emptyset$, то произведение образов элементов $(R_1, \emptyset)$, $(\emptyset, R_2)$ при гомоморфизме $i_{s_1 s_2,s'}$ пусто, то есть

$$i_{s_1 s_2,s'}(R_1, \emptyset) \times i_{s_1 s_2,s'}(\emptyset, R_2) = i_{s_1 s_2,s'}((R_1, \emptyset) \times (\emptyset, R_2)) = \emptyset.$$

Из неприводимости $\mathcal{R}'_{s'}$ следует (утверждение 5.12), что один из элементов $i_{s_1 s_2,s'}(R_1, \emptyset)$ или $i_{s_1 s_2,s'}(\emptyset, R_2)$ пуст. Для определенности предположим, что $i_{s_1 s_2,s'}(R_1, \emptyset) = \emptyset$. Отсюда, $i_{s_1,s'}(R_1, \emptyset) = \emptyset$, то есть $i_{s_1,s'}$ — не вложение.

Положим $j(s') = s$, если $i_{s_1,s'}$ — вложение. Таким образом, j — частичное отображение. Кроме того, положим $j_{s'} = i_{s_1,s'}$, для $s = j(s')$. Это завершает доказательство теоремы.

6 Описание и классификация неприводимых реляционных алгебр

По теореме предыдущего раздела произвольная реляционная алгебра с конечным множеством образующих представляется в виде канонической прямой суммы неприводимых реляционных алгебр. Поэтому, чтобы завершить описание реляционных алгебр, нужно дать описание неприводимых реляционных алгебр.

Т е о р е м а 6.1. Если $\mathcal{R}$ — неприводимая $\mathcal{K}$-алгебра с конечным множеством образующих, тогда существует гомоморфизм - вложение $\mathcal{R} \to \mathcal{D}$, где $\mathcal{D}$ — $\mathcal{K}$-алгебра действительных отношений (см. пример 2.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $R_i \in \mathcal{R}(A_i)$, для $i = 1, ..., n$ — образующие $\mathcal{K}$-алгебры $\mathcal{R}$. Рассмотрим свободную $\mathcal{K}$-алгебру $\mathcal{K}[A_1, ..., A_n]$ и гомоморфизм $j : \mathcal{K}[A_1, ..., A_n] \to \mathcal{R}$, который переводит образующие A_i в R_i, то есть $j(A_i) = R_i$, для $i = 1, ..., n$. Тогда, так как j — гомоморфизм на всю алгебру, то, согласно утверждениям 5.7 и 5.5, имеем равенство:

$$\mathcal{K}[A_1, ..., A_n] = j^{-1}(\emptyset) \oplus \mathcal{R}.$$

Отсюда следует, что $\mathcal{R}$ вкладывается в $\mathcal{K}[A_1, ..., A_n]$.

Пусть $R \in \mathcal{R}(A) \subset \mathcal{K}[A_1, ..., A_n]$ — непустой элемент $\mathcal{R}$. Согласно построению свободной $\mathcal{K}$-алгебры $\mathcal{K}[A_1, ..., A_n]$ ее элемент R представляется некоторой операцией над отношениями $f \in \mathcal{K}(A_1, ..., A_n; A)$. Так как по построению f — непустая операция, то по определению равенства операций существуют такие действительные отношения, что $r_i \in \mathcal{D}(A_i)$, что $f(r_1, ..., r_n) \neq \emptyset$.

Рассмотрим гомоморфизм $(r_1, ..., r_n) : \mathcal{K}[A_1, ..., A_n] \to \mathcal{D}$, переводящий образующие A_i алгебры $\mathcal{K}[A_1, ..., A_n]$ в $r_i, \quad i = 1, ..., n$. Этот гомоморфизм переводит элемент $R \in \mathcal{R} \subset \mathcal{K}[A_1, ..., A_n]$, соответствующий f, в непустой элемент $\mathcal{K}$-алгебры $\mathcal{D}$. Поэтому ограничение гомоморфизма $(r_1, ..., r_n)$ на $\mathcal{R}$ — вложение, так как $\mathcal{R}$ неприводима и не имеет собственных идеалов. Это завершает доказательство теоремы.

Заметим, что, согласно следствиям 5.13 и 5.14, каждая подалгебра алгебры реальных отношений $\mathcal{D}$ неприводима. Поэтому по теореме 5.1, чтобы описать все неприводимые реляционные алгебры, нужно описать все реляционные подалгебры алгебры $\mathcal{D}$.

Далее будет предполагаться, что подалгебра $\mathcal{R}$ содержит единицы алгебры $\mathcal{D}$. Это предположение не сильно ограничивает общность, так как в противном случае, если в качестве областей значений атрибутов взять элементы, входящие хотя бы в одно из отношений алгебры $\mathcal{R}$, то условие будет выполнено.

Для начала рассмотрим алгебру реальных отношений, введенную в разделе 1, над категорией наборов атрибутов $\bar{\mathcal{A}}$ без условия конечности элементов в наборах. Через D, как и раньше, обозначается разъединенное объединение областей значений всех типов атрибутов, рассматриваемое как набор атрибутов. Для любого набора атрибута A, конечного или бесконечного, множество всех отношений $\mathcal{D}(A)$ с набором атрибутов A по определению совпадает с множеством всех подмножества в $\mathcal{A}(A, D)$, где $\mathcal{A}(A, D)$ — множество всех отображений (согласований) из набора атрибутов A в D, сохраняющие типы атрибутов.

Пусть $\mathcal{R}$ — реляционная подалгебра в $\mathcal{D}$. Это означает, что для каждого набора атрибутов A подмножество $\mathcal{R}(A) \subset \mathcal{D}(A)$ является полной булевой подалгеброй, и для каждого согласования атрибутов $\varphi : B \to A$ и произвольных отношений $R \in \mathcal{R}(A)$ и $R' \in \mathcal{R}(B)$ отношения $\varphi^*(R) \in \mathcal{R}(B)$ и $\varphi_*(R') \in \mathcal{R}(A)$.

Рассмотрим полную булеву алгебру $\mathcal{R}(D)$. Она является подалгеброй $\mathcal{D}(D)$, которая, в свою очередь, представляет собой булеву алгебру всех подмножеств множества $\mathcal{A}(D, D)$. Так как $\mathcal{R}(D)$ содержит единицу $E(D)$ булевой алгебры $\mathcal{D}(D)$ и в ней определена операция бесконечного пересечения, то существует наименьший элемент $H \in \mathcal{R}(D)$, содержащий тождественное отображение $id(D) \in \mathcal{A}(D, D)$.

У т в е р ж д е н и е 6.2. Подмножество $H \subset \mathcal{A}(D, D)$ является группой относительно операции композиции.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подмножество H по построению содержит единицу $id(D) \in H$. Пусть $h \in H \subset \mathcal{A}(D, D)$ — произвольный элемент множества H. Рассмотрим отношение $h^*(H)$. По определению операции h^*, отношение $h^*(H)$ состоит из всех элементов вида $h_1 \circ h$, где $h_1 \in H$, то есть $h^*(H) = H \circ h$ (знаком $\circ$ обозначена операция композиции отображений). В частности, элемент $h = id(D) \circ h \in h^*(H)$. Таким образом, $h^*(H)$ и H имеют непустое пересечение. Так как H — атом булевой алгебры $\mathcal{R}(D)$, то, согласно утверждению 5.1, $h^*(H)$ — атом и $H = h^*(H)$. Итак доказано, что для любого $h \in H$ выполняется равенство $H = H \circ h$, то есть композиция отображений из $H \subset \mathcal{A}(D, D)$ принадлежит

H и для каждого $h \in H$ найдется $h^{-1} \in H$, что $h^{-1} \circ h = id(D)$.

Утверждение 6.3. Для любого атома R булевой алгебры $\mathcal{R}(A)$ существует согласование наборов атрибутов $\varphi : A \to D$ такое, что $R = \varphi^*(H)$.

Доказательство. Так как $\mathcal{R}$ — подалгебра $\mathcal{D}$, то элемент $R \in \mathcal{R}(A)$ — это некоторое подмножество $R \subset \mathcal{A}(A, D)$. Элемент R непустой, поэтому существует некоторое отображение $\varphi : A \to D$, принадлежащее R. Рассмотрим $\varphi^*(H)$. По определению операции φ^* множество (отношение) $\varphi^*(H) = H \circ \varphi$ состоит из отображений набора A в D, представимых в виде композиции отображения φ и отображений $h \in H$. В частности, элемент $\varphi = id(D) \circ \varphi \in \varphi^*(H)$. Таким образом, R и $\varphi^*(H)$ имеют непустое пересечение. Так как R и $\varphi^*(H)$ — атомы, то $R = \varphi^*(H)$.

Перейдем к другому построению той же группы H.

Обозначим через $S(D)$ множество всех взаимно однозначных отображений D на себя, сохраняющих типы атрибутов. Очевидно, что $S(D)$ образует группу относительно композиции отображений. Будем говорить, что отношение R симметрично относительно $h \in S(D)$, если отношение R не изменяется после замены значений атрибутов под действием отображения h, то есть $h \circ R = R$, где через $\circ$, как и прежде, обозначена операция композиции отображений из $R \subset \mathcal{A}(A, D)$ и отображения $h \in \mathcal{D}$.

Утверждение 6.4. Пусть $R_i \in \mathcal{D}(A)$, для $i \in I$, — некоторое множество отношений, симметричных относительно $h \in S(D)$. Тогда отношения $\bigcup\limits_{i \in I} R_i$, $\bigcap\limits_{i \in I} R_i$, $R_i \setminus R_j$ симметричны относительно h. Если $\varphi : B \to A$ и $\psi : A \to C$ — произвольные согласования наборов атрибутов, то отношения $\varphi^*(R_i)$ и $\psi_*(R_i)$ также симметричны относительно h.

Доказательство очевидно.

Обозначим через $S\{R_i\}_{i \in I}$ множество всех отображений $h \in S(D)$, относительно которых симметричны отношения R_i, при $i \in I$. Очевидно, что множество отображений $S\{R_i\}_{i \in I}$ образует подгруппу в $S(D)$, которая называется группой симметрии данного множества отношений.

Из утверждения 6.4 вытекает следующее утверждение.

Следствие 6.5. Если $\mathcal{R} \subset \mathcal{D}$ — подалгебра алгебры отношений и R_i, при $i \in I$, — ее образующие, то любое отношение $R \in \mathcal{R}$ симметрично относительно всякого $h \in S\{R_i\}_{i \in I}$.

Утверждение 6.6. Для произвольной реляционной подалгебры

$\mathcal{R} \subset \mathcal{D}$ алгебры отношений группа H утверждения 3.2 совпадает с группой симметрии $S(\mathcal{R}) = S\{R_i\}_{i \in I}$, где $R_i,\ i \in I$, — образующие подалгебры $\mathcal{R}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем, что $S(\mathcal{R}) \subset H$. Так как $H \in \mathcal{R}$, то отношение H, согласно следствию 6.5, симметрично относительно всех $h \in S(\mathcal{R})$, то есть $H = h \circ H$ для всех $h \in S(\mathcal{R})$. Так как H содержит тождественное отображение $id(D)$, то отсюда следует, что $h \in H$ для всех $h \in S(\mathcal{R})$, то есть $S(\mathcal{R}) \subset H$. Перейдем к доказательству включения $H \subset S(\mathcal{R})$. Пусть $h \in H$ — произвольный элемент. Так как H — группа относительно операции композиции, то очевидно, что $H = h \circ H$, то есть отношение H симметрично относительно h. Согласно утверждению 6.3 любое отношение $R \in \mathcal{R}$ получается из H с помощью операций φ^* и объединений. Отсюда, согласно утверждению 6.4, отношение R симметрично относительно $h \in H$. Так как отношение $R \in \mathcal{R}$ — любое, то $h \in S(\mathcal{R})$, что завершает доказательство включения $H \subset S(\mathcal{R})$.

Т е о р е м а 6.7. Реляционные подалгебры $\mathcal{R} \subset \mathcal{D}$ алгебры отношений $\mathcal{D}$ над категорией наборов атрибутов $\bar{\mathcal{A}}$ (без ограничения их конечности) находятся во взаимно однозначном соответствии с подгруппами $H \subset S(D)$ группы всех перестановок элементов области значений атрибутов D, сохраняющих тип элементов. Подалгебре $\mathcal{R}$ сопоставляется подгруппа H всех перестановок, относительно которых симметрично каждое отношение подалгебры $\mathcal{R}$. Подгруппе H сопоставляется подалгебра R, состоящая из всех отношений симметричных относительно элементов группы H.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathcal{R} \subset \mathcal{D}$ — произвольная подалгебра. Согласно утверждению 6.2, ей соответствует подгруппа $H \subset S(D)$. Так как, согласно утверждению 6.3, подгруппа H, рассмотренная как отношение $H \in \mathcal{R}(D)$, является атомарной образующей подалгебры $\mathcal{R}$, то разным подалгебрам соответствуют разные подгруппы. Пусть $H \subset S(D)$ — произвольная подгруппа. Ей соответствует подалгебра $\mathcal{R}$, порожденная отношением $H \in \mathcal{D}(D)$. Очевидно, что у такой подалгебры группа симметрии $S(\mathcal{R}) = S\{H\} = H$ и, согласно утверждению 6.6, H является атомарным элементом построенной подалгебры $\mathcal{R}$. Поэтому разным подгруппам соответствуют разные подалгебры. Второе и третье утверждение теоремы следуют из утверждений 6.6 и 6.5.

З а м е ч а н и е 6.1. Из доказательства теоремы 6.7 видно, что требование существования отношений с наборами атрибутов произвольной мощности можно ослабить требованием существования отношений с наборами атрибутов мощности, не превышающими мощность множества D.

Т е о р е м а 6.8. Пусть $\mathcal{R} \subset \mathcal{D}$ и $\mathcal{R}' \subset \mathcal{D}'$ — полные подалгебры алгебр отношений с областями значений атрибутов, соответственно, D и D', и $j : \mathcal{R} \to \mathcal{R}'$ — изоморфизм реляционных алгебр. Тогда найдется взаимно однозначное отображение $g : D \to D'$ области D на область D', сохраняющее типы элементов, такое, что $H = g^{-1} \circ H' \circ g$, где H и H' — подгруппы, соответствующие подалгебрам $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}'$. В этом случае для любого отношения $R \in \mathcal{R}$ соответствующее ему отношение $j(R) \in \mathcal{R}'$ имеет вид: $j(R) = g \circ R$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $H \in \mathcal{R}$ и $H' \in \mathcal{R}'$ — группы, определенные утверждением 6.2. Рассмотрим отношение $j(H)$. Так как j — изоморфизм реляционных алгебр, то он переводит атомарный элемент $H \in \mathcal{R}(D)$ в некоторый атомарный элемент $j(H)$ булевой алгебры $\mathcal{R}'(D)$. Согласно утверждению 6.3, тогда найдется такое отображение $g : D \to D$, что $j(H) = g^*(H')$. Аналогичными рассуждениями найдется такое отображение $g_1 : D' \to D$, что $j^{-1}(H') = g_1^*(H)$, где j^{-1} — гомоморфизм алгебры $\mathcal{R}'$ в $\mathcal{R}$, обратный гомоморфизму j. Покажем, сначала, что g — взаимно однозначное отображение. Для этого рассмотрим равенство $H = j^{-1}(j(H)) = j^{-1}(g^*(H'))$. Так как j^{-1} — гомоморфизм реляционной алгебры, то, по определению гомоморфизма, он коммутирует с операцией g^*, и последнее равенство принимает вид $H = g^*(j^{-1}(H'))$. Учитывая, что $j^{-1}(H') = g_1^*(H)$, получим равенство $H = g^*(g_1^*(H))$, из которого, по определению операций g^* и g_1^*, следует, что $H = (H \circ g_1) \circ g$. В частности, имеем равенство: $id(D) = (h \circ g_1) \circ g$, то есть отображение g имеет обратное слева. Если аналогичным образом рассмотреть равенство $H' = j(j^{-1}(H'))$, то получим равенство $H' = (H' \circ g) \circ g_1$, из которого следует равенство $h_1 = (id(D') \circ g) \circ g_1$, где $h_1 \in H'$ и, следовательно, обратим. Умножим обе части последнего равенства на h_1^{-1} справа. Получим, $id(D') = g \circ (g_1 \circ h_1^{-1})$, то есть отображение g имеет обратное справа. Отсюда стандартным образом следует, что g — взаимно однозначное отображение.

Для доказательства включения $g^{-1} \circ H' \circ g \subset H$ рассмотрим выражение $(g^{-1} \circ h_2 \circ g)^*(g^*(H'))$, где h_2 — произвольный элемент группы H'. По определению операций $(g^{-1} \circ h_2 \circ g)^*$ и g^*, имеем: $(g^{-1} \circ h_2 \circ g)^*(g^*(H')) = H' \circ g \circ (g^{-1} \circ h_2 \circ g) = H' \circ g = g^*(H')$, где второе равенство следует из ассоциативности операции композиции и равенств $g \circ g^{-1} = id(D)$, $H' \circ h_2 = H'$. Итак, доказано, что операция $(g^{-1} \circ h_2 \circ g)^*$ оставляет отношение $g^*(H') = j(H)$ неизменным. Так как j — изоморфизм, это значит, что операция $(g^{-1} \circ h_2 \circ g)^*$ оставляет неизменным и отношение

H. То есть $(g^{-1} \circ h_2 \circ g)^*(H) = H$ или, по определению действия операции, $H \circ (g^{-1} \circ h_2 \circ g) = H$. Так как группа H содержит тождественное отображение, то последнее равенство возможно тогда и только тогда, когда $g^{-1} \circ h_2 \circ g \in H$. Учитывая, что h_2 — произвольный элемент группы H', получаем включение $g^{-1} \circ H' \circ g \subset H$.

Для доказательства включения $g^{-1} \circ H' \circ g \supset H$ проводятся аналогичные рассуждения, где вместо отображения g рассматривается отображение $g_1 : D' \to D$. В результате получается включение $g_1^{-1} \circ H \circ g_1 \subset H'$. Ранее мы получили равенство $id(D) = (h \circ g_1) \circ g$, где $h \in H$. Отсюда выражается $g_1 = h^{-1} \circ g^{-1}$. Подставив это выражение в последнее полученное включение, получим соотношение $g \circ h \circ H \circ h^{-1} \circ g^{-1} \subset H'$. Умножим это соотношение слева на g^{-1} и справа на g. Учитывая, что h принадлежит H, получим требуемое включение.

Из доказанных двух соотношений $g^{-1} \circ H' \circ g \subset H$ и $g^{-1} \circ H' \circ g \supset H$ следует требуемое равенство $g^{-1} \circ H' \circ g = H$.

Последнее утверждение теоремы следует из того, что сопоставление $R \mapsto g \circ R$ для любого отношения $R \in \mathcal{R}$ является, очевидным образом, гомоморфизмом реляционных алгебр, когда $g : D \to D'$ — взаимно однозначное отображение. Так как этот гомоморфизм и гомоморфизм j, переводят образующую H алгебры $\mathcal{R}$ в один и тот же элемент $j(H) = g^*(H') = (g \circ H \circ g^{-1}) \circ g = g \circ H$, то они совпадают.

Перейдем к изучению подалгебр $\mathcal{R} \subset \mathcal{D}$ алгебры отношений над категорией $\mathcal{A}_T$ конечных наборов атрибутов. При этом область значений атрибутов $D = \coprod_{t \in T} D_t$ может быть бесконечной.

Так как категория $\mathcal{A}_T$ является подкатегорией категории всех множеств $\bar{\mathcal{A}}_T$, типизированных множеством T, то естественно начать изучение подалгебры $\mathcal{R}$ с изучения наименьшей подалгебры $\bar{\mathcal{R}} \subset \bar{\mathcal{D}}$, содержащей элементы $\mathcal{R}$, где $\bar{\mathcal{D}}$ — алгебра всех отношений с произвольными наборами атрибутов. Алгебра $\bar{\mathcal{R}}$ называется пополнением алгебры $\mathcal{R}$ за счет операций над отношениями с бесконечными наборами атрибутов. Для любой подалгебры $\bar{\mathcal{R}} \subset \bar{\mathcal{D}}$ такое пополнение $\bar{\mathcal{R}}$ существует, как пересечение всех подалгебр в $\bar{\mathcal{D}}$, содержащих $\mathcal{R}$.

Интересным и важным вопросом является вопрос о том, что при таком пополнении происходит с множествами $\mathcal{R}(A)$ для конечных наборов атрибутов. Очевидно, что $\mathcal{R}(A) \subset \bar{\mathcal{R}}(A)$. Более того, кажется естественным, что $\mathcal{R}(A) = \bar{\mathcal{R}}(A)$. Однако, автору удалось доказать это равенство лишь при условии счетности или конечности области значений атрибутов D.

Пусть $\mathcal{R} \subset \mathcal{D}$ — произвольная подалгебра реляционной алгебры отношений с конечными наборами атрибутов. Для любого конечного подмножества $e_L : L \subset D$ области значений атрибутов рассмотрим полную булеву алгебру $\mathcal{R}(L)$, которая по определению является подалгеброй булевой алгебры всех подмножеств множества $\bar{\mathcal{A}}(L, D)$. Обозначим через $H(L)$ наименьший элемент булевой алгебры $\mathcal{R}(L)$, содержащий отображение $e_L : L \to D$.

Система отображений $\mathcal{H} = \bigcup\limits_{L \subset D} H(L)$, где L — любое конечное подмножество D, является аналогом группы H утверждения 6.2 для подалгебр отношений с конечными наборами атрибутов. Если отображения h_1 и h_2 принадлежат $\mathcal{H}$ и образ отображения h_2 содержится в области определения отображения h_1, то через $h_1 \circ h_2$ обозначается композиция отображений.

У т в е р ж д е н и е 6.9. Система отображений $\mathcal{H} = \bigcup\limits_{L \subset D} H(L)$ обладает следующими свойствами:

для любого конечного подмножества $e_L : L \subset D$ множество $H(L)$ является подмножеством множества $\bar{\mathcal{A}}_T(L, D)$, содержащим отображение e_L;

если $h_1 : L_1 \to L_2 \subset D$ — элемент множества $H(L_1)$, то $h_1^*(H(L_2)) = H(L_2) \circ h_1 = H(L_1)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Первое свойство, сформулированное в утверждении, следует из определения $H(L)$. Для доказательства второго второго свойства заметим, что по построению $H(L_i)$ — это атомы булевых алгебр $\mathcal{R}(L_i)$. С другой стороны, операция h_1^* переводит атомы булевой алгебры $\mathcal{R}(L_2)$ в атомы булевой алгебры $\mathcal{R}(L_1)$. Следовательно, $h_1^*(H(L_2))$ и $H(L_1)$ — атомы булевой алгебры $\mathcal{R}(L_1)$, но они имеют общий элемент h_1, а потому совпадают.

С л е д с т в и е 6.10. Все отображения из системы отображений $\mathcal{H}$ являются вложениями. Более того, если $h \in H(L)$ и $L_1 \subset D$ — образ отображения h, то найдется отображение $h_1 \in H(L_1)$ такое, что композиция $h_1 \circ h = e_L$. Для всякого отображения $h \in H(L)$ и любого конечного подмножества $L_2 \subset D$, содержащего L, существует отображение $h_2 \in H(L_2)$, являющееся продолжением отображения h. Если h' и h'' — произвольные элементы $\mathcal{H}$ такие, что композиция $h'' \circ h'$ определена, то $h'' \circ h'$ принадлежит системе отображений $\mathcal{H}$.

Доказательство следствия вытекает из первого и второго свойств системы отображений $\mathcal{H}$, сформулированных в утверждении 6.9.

Следующее утверждение является аналогом утверждения 6.3 для реляционных алгебр с конечными наборами атрибутов.

У т в е р ж д е н и е 6.11. Для любого атомарного элемента $R \in \mathcal{R}(A)$ реляционной подалгебры $\mathcal{R} \subset \mathcal{D}$ найдется такое сюръективное согласование наборов атрибутов $\varphi : A \to L$, что $R = \varphi^*(H(L))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим отношение R как подмножество в множестве согласований $\bar{\mathcal{A}}_T(A, D)$. Пусть $\varphi \in R$ и L — образ множества A при отображении φ. Рассмотрим отношение $\varphi^*(H(L))$. По определению операции φ^* это отношение имеет вид $H(L) \circ \varphi$. Так как отношение $H(L)$ содержит элемент e_L, то отсюда следует, что $\varphi \in \varphi^*(H(L))$. По определению, $H(L)$ — атом булевой алгебры $\mathcal{R}(L)$. Так как операция φ^* переводит атомы в атомы и отношения R и $\varphi^*(H(L))$ имеют общий элемент φ, то $R = \varphi^*(H(L))$.

Утверждения 6.9, 6.10, 6.11 показывают в каком смысле система отображений $\mathcal{H} = \bigcup\limits_{L \subset D} H(L)$ является аналогом группы утверждения 6.2. Более того, не составляет труда сформулировать и доказать теорему, аналогичную теореме 6.7 о взаимно однозначном соответствии между полными подалгебрами $\mathcal{R}$ алгебры отношений $\mathcal{D}$ над конечными наборами атрибутов и системами отображений $\mathcal{H}$, обладающими свойствами, сформулированными в следствии 6.10. Очевидно также понятие отношения симметричное относительно системы отображений $\mathcal{H}$.

Перейдем теперь к случаю, в котором удалось доказать более сильное утверждение о соответствии подалгебр $\mathcal{R}$ алгебры отношений $\mathcal{D}$ над конечными наборами атрибутов и их групп симметрий.

Пусть $\mathcal{R} \subset \mathcal{D}$, как и прежде произвольная реляционная подалгебра алгебры отношений с конечными наборами атрибутов; $\mathcal{H} = \bigcup\limits_{L \subset D} H(L)$ — система отображений утверждения 6.9, построенная по алгебре отношений $\mathcal{R}$. Пусть, кроме того, $\bar{\mathcal{R}} \subset \bar{\mathcal{D}}$ — пополнение подалгебры $\mathcal{R}$ за счет операций над отношениями с бесконечными наборами атрибутов, и $\bar{H}$ — группа симметрии подалгебры $\bar{\mathcal{R}}$, определенная в теореме 6.7.

Сформулируем, сначала, утверждение, дающее выражение группы симметрии $\bar{H}$ через систему отображений $\mathcal{H}$.

У т в е р ж д е н и е 6.12. Взаимно однозначное отображение $\bar{h} : D \to D$ тогда и только тогда принадлежит группе симметрии $\bar{H}$ подалгебры отношений, когда ограничение отображения $\bar{h}$ на любое конечное подмножество

$L \subset D$ принадлежит $H(L)$.

Доказательство. Рассмотрим группу симметрии $\bar{H}$ подалгебры $\bar{\mathcal{R}} \subset \bar{\mathcal{D}}$. Так как, согласно утверждению 6.11, отношения $H(L)$, где L — конечные подмножества D, являются образующими подалгебры отношений $\mathcal{R} \subset \mathcal{D}$, а, следовательно, и пополненной подалгебры $\bar{\mathcal{R}}$, то по утверждению 6.6 взаимно однозначное отображение $\bar{h} : D \to D$ является элементом $\bar{H}$ тогда и только тогда, когда $\bar{h}$ является симметрией отношений $H(L)$ для всех конечных подмножеств $L \subset D$. Рассмотрим действие симметрии $\bar{h}$ на отношение $H(L)$. По определению симметрии $\bar{h} \in \bar{H}$ тогда и только тогда, когда $\bar{h} \circ H(L) = H(L)$. В частности, $\bar{h} \circ e_L \in H(L)$, то есть ограничение отображения $\bar{h}$ на L принадлежит $H(L)$ для любого конечного подмножества $L \subset D$. Наоборот, если ограничение взаимно однозначного отображения $\bar{h} : D \to D$ на любое конечное подмножество принадлежит $\mathcal{H}$, то $\bar{h} \circ H(L) = H(L)$, так как композиция отображений из $\mathcal{H}$ принадлежит $\mathcal{H}$.

В случае счетности области значений атрибутов D выражение системы отображений $\mathcal{H}$ через группу симметрии $\bar{H}$ дается следующим утверждением.

Утверждение 6.13. Если мощность области значений атрибутов D счетна, то выполняются равенства $H(L) = e_L^*(\bar{H})$ для всех конечных подмножеств $e_L : L \subset D$. То есть отображения из системы $\mathcal{H}$ являются ограничениями элементов группы $\bar{H} \subset \bar{\mathcal{A}}(D, D)$ на конечные подмножества $L \subset D$.

Доказательство утверждения 6.13 основано на следующей лемме.

Лемма. Для любого отображения h, принадлежащего $\mathcal{H}$, и любого элемента $d \in D$ существует такое продолжение h' отображения h, также принадлежащее $\mathcal{H}$, что элемент d принадлежит области определения и образу отображения h'.

Доказательство леммы. Пусть отображение $h : L \to D$ принадлежит $H(L)$. Согласно следствию 6.10, всякое такое отображение продолжается до отображения $h_1 : L \cup \{d\} \to D$, принадлежащего $H(L \cup \{d\})$. Это же следствие утверждает, что обратное отображение $h_1^{-1} : L_1 \to D$, где L_1 — образ отображения h_1, принадлежит $H(L_1)$. Рассмотрим продолжение $h_2 : L_1 \cup \{d\} \to D$ отображения h_1^{-1} на элемент d, принадлежащее $H(L_1 \cup \{d\})$. Нетрудно видеть, что требуемым в лемме продолжение h' отображения h является отображение h_2^{-1}, обратное к отображению h_2.

Доказательство утверждения 6.13. Перенумеруем элементы области значений атрибутов D. Пусть d_n — n-ый элемент области D. Для любого отображения $h \in H(L)$ построим последовательность продолжающих друг друга отображений h_n из системы отображений $\mathcal{H}$. При этом потребуем, чтобы $h_0 = h$ и элемент d_n принадлежал области определения и образу отображения h_n. Согласно лемме такая последовательность может быть индуктивно построена. Рассмотрим отображение $\bar{h} : D \to D$, которое на области определения h_n совпадает с h_n для каждого n. Отображение $\bar{h}$ по построению продолжает отображение $h \in H(L)$ и является взаимно однозначным, так как отображения h_n — вложения и для любого элемента $d_n \in D$ определен образ $\bar{h}(d_n) = h_n(d_n)$ и прообраз $\bar{h}^{-1}(d_n) = h_n^{-1}(d_n)$.

Введем в множестве всех обратимых отображений $S(D)$ области значений атрибутов на себя следующую топологию:

для любого подмножества $K \subset S(D)$ обратимое отображение $\bar{h} \in S(D)$ принадлежит замыканию $\bar{K}$ тогда и только тогда, когда ограничение отображения $\bar{h}$ на любое конечное подмножество $e_L : L \subset D$ принадлежит множеству отображений $K \circ e_L$.

Т е о р е м а 6.14. Реляционные подалгебры $\mathcal{R} \subset \mathcal{D}$ алгебры отношений с конечными наборами атрибутов и счетной или конечной областью значений атрибутов D находятся во взаимно однозначном соответствии с замкнутыми подгруппами $\bar{H} \subset S(D)$ группы $S(D)$ в топологии, определенной выше. Подгруппа $\bar{H}$ является группой симметрии отношений подалгебры $\mathcal{R}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Замкнутость подгруппы симметрии $\bar{H} \subset S(D)$ пополненной подалгебры отношений $\bar{\mathcal{R}}$ следует из утверждения 6.12. Кроме того, из утверждений 6.12 и 6.13 следует взаимно однозначное соответствие между замкнутыми подгруппами $\bar{H}$ и системами отображений $\mathcal{H}$ и, следовательно, между замкнутыми подгруппами $\bar{H}$ и реляционными подалгебрами $\mathcal{R}$ алгебры отношений $\mathcal{D}$.

Литература

[1] Агафонов В. Н. *Спецификация программ: понятийные средства и их организация.* Новосибирск: Наука,Сиб.отд-ние,1990.

[2] Агафонов В. Н. *Типы и абстракция данных в языках программирования.* В кн. Данные в языках программирования. М.:Мир,1982, с.263–327.

[3] Бениаминов Е. М. *Алгебраический подход к моделям баз данных реляционного типа.* В кн.:Семиотика и информатика, 1980, вып.14, с.44-80.

[4] Бениаминов Е. М. *Алгебраическая стуктура реляционных моделей баз данных.* НТИ, сер.2, 1980, N9, с. 23-25.

[5] Бениаминов Е. М., Березина Н. А. *Об алгебраическом подходе к описанию схем баз данных.*// В сб. Вопросы создания Автоматизированной системы НТИ по документам ГАФ СССР, Москва: ГАУ при Совете Министров СССР, ВНИИДАД, 1981, с.69-77.

[6] Бениаминов Е. М. *О роли симметрии в реляционных моделях баз данных и логических структурах.* НТИ, сер.2, 1984, N5, с.17-25.

[7] Бениаминов Е. М., Березина Н. А., Дунская М. В. *Разработка методов моделирования автоматизированной обработки, поиска и размещения данных в больших информационных системах.* СИФ ОЦНТИ, ВНИИДАД, депонированная рукопись, инв. N031–85,М.,1985.

[8] Бениаминов Е. М. *О некотором подходе к представлению знаний.* Тезисы докладов 4 Всесоюзн.конференции "Применение методов мат. логики" г. Таллин, 1986, с.34-36.

[9] Бениаминов Е. М. *Основания категорного подхода к представлению знаний. Категорные средства.* Изв. АН СССР Техн. кибернет.,N 2, 1988 , с.21–33.

[10] Бениаминов Е. М. *Рефлексивные топосы в категорном подходе к представлению знаний.* Тезисы докладов Всесоюзн. школы-семинара

"Семиотические аспекты формализации интеллектуальной деятельности" г. Боржоми, 1988, с.111-113.

[11] Бениаминов Е.М., Вайнтроб А. Ю. *Основные принципы диалогового языка для представления знаний средствами категорного подхода.* Материалы конференции ДИАЛОГ-87, г. Тбилиси, 1988, с.174-177.

[12] Бениаминов Е. М. *Алгебраические системы и типы данных.* //В кн.:Системное и теоретическое программирование, Ростов-н-Д: РГУ, 1988, с.83-92.

[13] Бениаминов Е. М. *Система представления и обработки понятий, основанная на алгебраическом (категорном) подходе.* Труды II Всесоюзной конференции "Искусственный интеллект- 90", т.2, 1990, с.8-11.

[14] Вигнер П. *Программирование на языке АДА.* М.:Мир, 1983.

[15] Глушков В. М., Цейтлин Г. Е., Ющенко Е. Л. *Алгебра, логика, языки, программирование.* Киев:Наукова думка, 1974.

[16] Голдблатт Р. *Топосы. Категорный анализ логики.* М.:Мир, 1983.

[17] Гончаров С. С., Ершов Ю. Л., Свириденко Д. И. *Семантические основы логического программирования*// В сб. Концептуализация и смысл, под ред. Полякова И. В., Новосибирск:Наука, 1990, с.6-20.

[18] Джонстон П. Т. *Теория топосов.* М.:Наука, 1986.

[19] Жожикашвили А.В., Стефанюк В.Л. *Теория категорий в задачах представления знаний и обучения.* Изв. АН СССР. Техн. кибернет., N 2, 1986.

[20] Замулин А. В. *Системы программирования баз данных и знаний.* Новосибирск:Наука, 1990.

[21] Калиниченко Л. А. *Методы и средства интеграции неоднородных баз данных.* М.:Наука, 1983.

[22] Калиниченко Л. А., Рывкин В. М. *Машины баз данных и знаний.* М.:Наука, 1990.

[23] Капитонова Ю. В., Летичевский А. А. *Математическая теория проектирования вычислительных систем.* М.:Наука, 1988.

[24] Кондрашина Е. Ю., Литвинцева Л. В., Поспелов Д. А. *Представление знаний о времени и пространстве в интеллектуальных системах.* М.:Наука, 1989.

[25] Кучеров Г. А. *Системы подстановок термов.* Препринт 601, ВЦ АН СССР Сиб. отделение, Новосибирск, 1985.

[26] Мальцев А. И. *К общей теории алгебраических систем.* Мат. сборник, 1954, т.35, вып.1.

[27] Массер Д. *Спецификация абстрактных типов данных в системе AFFIRM.*// В сб.: Требования и спецификации в разработке программ, М.:Мир, 1984, с.199-222.

[28] Плоткин Б. И. *Универсальная алгебра, алгебраическая логика и базы данных.* М.:Наука, 1991.

[29] Поспелов Д. А. *Логико-лингвистические модели в системах управления.* М.:Энергоиздат, 1981.

[30] Свириденко Д. И. *Проект Сигма. Цели и задачи.* // В сб. Логические методы в программировании под ред. Ершова Ю. Л. (Вычислительные системы, вып. 133), РАН, Сиб. отд.-ние, Ин.-т математики, Новосибирск, 1990, с.68-94.

[31] Цаленко М. Ш. *Моделирование семантики в базах данных.* М.:Наука, 1989.

[32] Шенфилд Дж. *Математическая логика.* М.:Наука, 1975.

[33] Andréka H., Németi I. *Applications of universal algebra, model theory and categories in computer science (Part 1)* Comput. Lingust. Comput. Lang., 13, 1979, p. 152-282.

[34] Andréka H., Németi I. *Applications of universal algebra, model theory and categories in computer science (Part 2)* Comput. Lingust. Comput. Lang., 14, 1980, p. 43-65.

[35] Andréka H., Németi I. *Applications of universal algebra, model theory and categories in computer science (Part 3)* Lect. Notes in Comp. Sci., V.117, Springer-Verlag, Berlin, 1981, p. 281-290.

[36] Banchilhon F. *On the Compliteness of Query Language for Relational Data Bases.* Lect. Notes in Comp. Sci., V.64, Springer-Verlag, 1978, pp.76-98.

[37] Beniaminov E. M. *Concept Bases and Algebraic Modeling Methods.* Proceedings of the International Workshop on Advances in Databases and Information Systems (ADBIS'94), 1994, p.133-135.

[38] Beniaminov E. M. *A Categorical Approach to Knowledge Representation.* Japan-CIS Symposium on Knowledge Based Software Engineering'94 (JCKBSE'94), 1994, p.181-182.

[39] Beniaminov E. M. *Algebraic Invariants of Database Schemes.* Proceedings of the Second International Workshop on Advances in Databases and Information Systems (ADBIS'95), V.1, 1995, p.259-263.

[40] Breu R. *Algebraic Specification Techniques in OOP Environments.* Lect. Notes in Comp. Sci., V.562, Springer-Verlag, 1991.

[41] Burstall R. M., Goguen J. A. *The Semantics of Clear, a Specification Language* In: Proceedings, of the 1979 Copenhagen Winter Shcool on Abstrakt Software Specification, Springer-Verlad, Berlin, 1980, 292-332.

[42] Chandra A. K., Harel D. *Computable queries for relational data bases.* J. Comput. & Syst. Sci., V.21, N2, 1980, p.156-172.

[43] Codd E. F. *A relational model for large shared data banks.* Comm. of ACM 13, 6, 1970, p.377-387.

[44] Dershowitz N. *Orderings for term-rewriting systems.* Theor. Comput. Sci., 1982, V.17, 3, pp.279-302.

[45] Elmasri R., Weeldrever J., Hevner A. *The category concept: an extension to the entity-relatconship model* Data & Knowledge Engineering, V.1, N1,1985.

[46] Ehrig H., Mahr B. *Fundamentals of Algebraic Specification.* V.1, Springer-Verlag, 1985.

[47] Ehrig H., Mahr B. *Fundamentals of Algebraic Specification.* V.2, Springer-Verlag, 1990.

[48] *First International Symposium on Category Theory Applied to Computation and Control* Lect. Notes in Com. Sci, V.25, Springer - Verlad, Berlin, 1975.

[49] Georgescu I. *A Categorial approach to knowledge-based systems.* Computers and Artifical Intelligence, V.3, N2, 1984, pp.105-113.

[50] Goguen J. A., Thatchar J. W., Wagner E. G. *An inititial algebra approach to the specification, correctness and implementation of abstract data types.* In Current Trends in Programming Methodology IV: Data Structuring, Prentice Hall, 1978, pp.80-144.

[51] Goguen J. A. *Some design principles and theory for OBJ-O, a language to express and execute algebraic specifications of problems.* In: Lect. Notes Comput. Sci.,V.75, 1979, pp.425-473.

[52] Goguen J. A., Burstall R. M. *Some fundamental algebraic tools for the semantics of computation.* Theoretical Computer Science, V.31, N2, 3, 1984.

[53] Goguen J. A., Burstall R. M. *Introducing Institution.* Lect. Not. Comp.Sci., V.164, 1984.

[54] Goguen J. A., Meseguer J. *Equality, types, modules, and (why not?) generics for logic programming.* Conf. of Logical Prog., Uppsala, Sweden, 1984, 179-210.

[55] Goguen J. A., Meseguer J. *Eqlog: Equality, types, and generic modules for logic programming.* In Douglas SeGroot and Gary Lindstrom, eds. "Logic Programming: Functions, Relations and Equations", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1986, pp.295-363.

[56] Goguen J. A., Meseguer J. *Order-sorted algebra solves the constructor selector, multiple representation and coercion problems.* Symposium on Logic in Comp. Sci., IEEE Comp. Society Press, 1987, pp.18-29.

[57] Goguen J. A., Burstall R. M. *Institutions: Abstract Model Theory for Specification and Programming.* Jorn. of ACM, V.39, 1, 1992, pp.95-146.

[58] Grothendieck A., Verdier J. L. *Théorie des Topos.* (SGA 4, exposés I-VI).–Second edition.–Berlin; Heidelberg; N. Y.:Springer, 1972.

[59] Huet G. *Confluent reductions: abstract properties and applications to term rewriting systems.* Journ. of ACM, 1980, v.27, N4, pp.797-821.

[60] Kaplan S. *Symplifying conditional term rewriting systems: unification, termination and confluence.* Jorn. Symbolic Computation 4(3), 1987, pp.295-334.

[61] Knuth D., Bendix P. *Simple word problems in universal algebras.* In: Conputational Problems in Abstract Algebra, Pergamon Press, Elmsford, New York, 1970, pp.263-297.

[62] Krasner M. I. *Generalization et analogues de la theorie de Galois.* Comptes Rendus de Congress de la Victorie de I'Ass. Franc. pour I'Avancem. Sci., 1945, pp. 54-58.

[63] Lawvere F. W. *Functorial semantics of algebraic theories.* Proc. Nat. Acad. Sci., 1963, V.50, N5, pp.869-872.

[64] Lawvere F. W. *Introduction* In: Toposes, Algebraic Geometry and Logic, Lect. Notes in Math., V.174, 1972.

[65] Maltsev A. *Algebraic Systems.* Springer-Verlag, 1973.

[66] Melton A., Schmidt D., and Strecher G. *Galois connections and computer science applications.* Lect. Notes in Comp. Sci., V. 240, Springer-Verlag, 1986.

[67] *Proceedings, Category Theory and Computer Programming,* Lect. Notes in Comp. Sci., V. 240, Springer-Verlag, 1986.

[68] *Proceedings, Category Theory and Computer Science,* Lect. Notes in Comp. Sci. V. 283, Springer-Verlag, 1987.

[69] Rydeheard D.F., Burstall R.M. *Computational category theory.* Prentice Hall, 1988.

[70] Tuijn C., Gyssens M., Paredaens J. *A Categorical Approach to Object-Oriented Data Modelling.* Proceedings of Third Workshop on Foundation of Models and Languages for Data and Objects, Aigen, 1991, pp.187–196.

[71] Rusinowitch M., Rémy J. L. (Eds.) *Conditional Term Rewriting Systems.* Lect. Notes in Comp. Sci., V. 656, Springer-Verlag, 1993.

[72] Zilles S.N. *Introduction to data algebras.* Lect. Notes Comput. Sci., V.86, Springer-Verlag, 1980.