Глава 3. Алгебраические средства представления понятий

1 Алгебраическая структура топосов конечного типа

Требование представления сложных понятий с использованием декартовых произведений или областей, состоящих из функций,а также использование подобъектов и отношений для областей, в которых не все элементы известны, приводит к необходимости использования соответствующих конструкций топоса [18]. В этом разделе рассматриваются топосы с конечным множеством образующих и некоторым условием конечности объектов. Показано, что такие топосы (с некоторым указанным ниже условием булевости, соответствующим требованию, что в топосе реализуется классическая логика) представляются в виде конечного произведения топосов конечных G-множеств $GFinset$ для некоторого набора конечных групп G. В частности показывается, что каждый подтопос топоса конечных множеств $Finset$, порожденный конечным набором функций и отношений эквивалентен категории G-множеств, где G — группа симметрии этих функций и отношений.

В приложениях топосов к моделированию схем баз данных особую роль играют булевы топосы.

О п р е д е л е н и е 1.1. Топос называется булевым, если классификатор подобъектов Ω с выделенным элементом $true : I \to \Omega$, где I — финальный объект категории, изоморфен $I \sqcup I$ — копроизведению I и I с выделенным элементом $true$ — вложением на первое слагаемое.

В литературе булевы топосы называют также классическими, так как в этом случае (и только в этом случае) соотношения между логическими операциями — преобразованиями Ω, являются соотношениями классической логики. Как известно [16], в общем случае в топосе реализуются соотношения интуиционистской логики.

Для задач представления знаний с использованием средств вычислительной техники подходят не произвольные категории, а лишь те, которые могут быть конструктивно заданы. В связи с этим рассматривается понятие алгебраического топоса, заданного конечным множеством образующих и соотношений и удовлетворяющего следующему условию конечности.

Пусть T — некоторый объект топоса $\mathcal{C}$. Через T^n обозначается декартова степень объекта T , через $T^n(x_1, ..., x_n)$ отношение в топосе $\mathcal{C}$ с переменными $x_1, ..., x_n$, совпадающее со всем T^n. Напомним, что отношение в топосе — это произвольный подобъект в декартовом произведении соответствующих объектов.

Через $\Delta_{i,j}(T^n)$ обозначим область истинности утверждения $(x_i = x_j)$ на объекте T^n. Подобъект $\Delta_{i,j}(T^n)$ представляет собой диагональное вложение T в i-ый и j-ый сомножители T^n, домноженное на T по остальным сомножителям.

О п р е д е л е н и е 1.2. Будем говорить, что объект T имеет мощность меньше n, если область истинности утверждения $\bigvee_{i \neq j}(x_i = x_j)$, где дизъюнкция берется по всевозможным парам неравных чисел $i, j \in \{1, ..., n\}$, задающего морфизм $T^n \to \Omega$ в область истин Ω, совпадает со всем T^n. Или, другими словами, выполняется равенство

$$T^n = \bigcup_{i \neq j} \Delta_{i,j}(T^n),$$

где объединение подобъектов берется по всевозможным парам неравных чисел $i, j \in \{1, ..., n\}$. Объект T в топосе $\mathcal{C}$ называется конечным, если найдется некоторое натуральное число n такое, что T имеет мощность меньше n.

З а м е ч а н и е 1.1. В определении 1.1 отражается в топосах на категорном языке формула

$$\forall x_1 \in T ... \forall x_n \in T(\bigvee_{i \neq j}(x_i = x_j)) = true,$$

которая означает, что в T нет n различных элементов.

О п р е д е л е н и е 1.3. Алгебраический топос $\mathcal{C}$ называется топосом конечного типа, если он булев имеет конечное множество образующих и все его объекты конечны.

О п р е д е л е н и е 1.4. Топос называется полным или двузначным, если его область истин (классификатор подобъектов) Ω имеет лишь два элемента $true : I \to \Omega$ и $false : I \to \Omega$.

Условие полноты топоса соответствует тому, что любое утверждение (формула, выражающая морфизм из I в Ω) в полном топосе либо истинно, либо ложно, то есть полнота топоса соответствует полноте теории в исчислении предикатов.

Топос конечных множеств $Finord$, объектами которого являются пустое множество и множества вида $\{1, 2, ..., n\}$ для любого натурального n, а морфизмами — любые отображения между ними, является примером полного топоса конечного типа.

Другие примеры получаются следующим образом. Пусть G — конечная группа. Рассмотрим категорию $GFinset$. Объектами категории $GFinset$ являются конечные множества M вместе с выделенным действием группы G на них, то есть для каждого элемента g группы G определено отображение $g : M \to M$, и произведению элементов $g_1 \circ g_2$ соответствует композиция отображений $g_1 : M \to M$ и $g_2 : M \to M$. Морфизмами категории $GFinset$ являются все отображения G-множеств $f : M \to N$, сохраняющие действием группы G, то есть $f(g(m)) = g(f(m))$ для любых $g \in G$ и $m \in M$.

Нетрудно проверить, что категория $GFinset$ образует топос. Действительно, одноточечное множество с тривиальным действием группы G на нем является финальным объектом I. Классификатор подобъектов Ω представляет собой двуточечное множество с тривиальным действием группы G. Декартово произведение и дизъюнктное объединение в категории $GFinset$, а также уравнитель и фактор совпадают с соответствующими операциями в категории конечных множеств при естественном определении действия группы G на получающихся множествах. Экспоненциалом $M \Rightarrow N$ двух G-множеств является множество всех отображений $h : M \to N$ из M в N, на котором элементы $g \in G$ действуют по правилу: $g(h)$ — это композиция трех отображений

$$g(h) : M \xrightarrow{g^{-1}} M \xrightarrow{h} N \xrightarrow{g} N,$$

то есть $g(h) = g \circ h \circ g^{-1}$.

У т в е р ж д е н и е 1.1. Алгебраический топос с конечным множеством образующих, эквивалентный категории $GFinset$, является полным топосом конечного типа.

Доказательство очевидно.

Категория $GFinset$ дает нам пример топоса с классической логикой, в котором каждое утверждение либо истинно, либо ложно, так как это полный топос. Поэтому, например, для любого объекта M из этого топоса можно выразить пустой он или нет и, даже, определить мощность объекта M. Но, если группа G действует на M без неподвижных точек, то в этом топосе мы не сможем выразить элемент объекта M. Это связано с тем, что элементы в топосе по определению есть морфизмы из I в M, то есть соответствуют в топосе $GFinset$ неподвижным точкам в G-множестве M.

Таким образом, о категории областей типов данных, эквивалентной категории $GFinset$, можно сказать, что в ней о данных мы знаем все, кроме способа указания некоторых элементов в областях. С точки зрения представления знаний это также можно сформулировать следующим образом: если категория, отражающая наши знания о представляемом фрагменте мира, эквивалентна категории $GFinset$, то это соответствует полному знанию об этом фрагменте с точностью до симметрии, которая не позволяет нам как-то выделять элементы среди симметричных.

Утверждение 1.2. Категории $G_1Finset$ и $G_2Finset$ эквивалентны тогда и только тогда, когда изоморфны группы G_1 и G_2.

Доказательство. Группу G_1 можно рассматривать как объект категории $G_1Finset$, на которой G_1 действует умножениями слева. Объект G_1 не имеет собственных подобъектов (атомарен), так как G_1 действует на себе транзитивно.

Пусть $F : G_1Finset \to G_2Finset$ — эквивалентность категорий. Тогда, так как G_1 — непустой неразложимый в прямую сумму объект категории $G_1Finset$, то $F(G_1)$ — непустой неразложимый объект категории $G_2Finset$, то есть непустое G_2-множество, имеющее одну траекторию действия G_2 на нем. Отсюда следует существование эпиморфного G_2-отображения $\alpha : G_2 \to F(G_1)$. Применяя к α функтор F^{-1}, получим эпиморфное G_1-отображение $F^{-1}(\alpha) : F^{-1}(G_2) \to F^{-1}(F(G_1))$ на объект $F^{-1}(F(G_1))$, который по определению эквивалентности категорий изоморфен G_1. Композиция эпиморфизма $F^{-1}(\alpha)$ и этого изоморфизма дает эпиморфное отображение $\beta : F^{-1}(G_2) \to G_1$. Аналогичные рассуждения, переставляя местами G_1 и G_2, показывают существование эпиморфного G_1-отображения $\alpha' : G_1 \to F^{-1}(G_2)$. Так как композиция $\beta \circ \alpha' : G_1 \to G_1$ — изоморфизм, то α' — моноэпиморфизм и, следовательно, α' — изоморфизм между G_1 и $F^{-1}(G_2)$.

Рассмотрим, теперь, множество морфизмов $F^{-1}(G_2)$ в себя. С одной стороны, так как $F^{-1}(G_2)$ изоморфен G_1, то множество морфизмов $F^{-1}(G_2)$ в себя образует относительно операции композиции группу, изоморфную G_1. С другой стороны, так как F^{-1} — эквивалентность категорий, это множество биективно множеству морфизмов G_2 в себя в категории $G_2Finset$, и, следовательно, относительно той же операции композиции морфизмов образует группу, изоморфную G_2. Отсюда следует требуемый в утверждении 1.2 изоморфизм G_1 и G_2.

Оказывается, категории вида $GFinset$ исчерпывают примеры полных топосов конечного типа.

Т е о р е м а 1.3. Если $\mathcal{C}$ — полный топос конечного типа, то существует такая конечная группа G, что категория $\mathcal{C}$ эквивалентна категории $GFinset$.

Прежде, чем перейти к доказательству самой теоремы, сформулируем и докажем несколько вспомогательных утверждений.

У т в е р ж д е н и е 1.4. Произведение непустых объектов в полном топосе непусто.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть T_1, T_2 — объекты полного топоса. Рассмотрим образ морфизма $I(T_1) : T_1 \to I$, где I — финальный объект топоса. Этот образ является подобъектом в I. По определению полного топоса, подобъекты в I — это либо пустой объект $\emptyset$, либо само I. Если образ $I(T_1)$ пуст, то T_1 отображается на пустой объект и, следовательно, по определению пустого объекта, ему изоморфен, что противоречит условию непустоты T_1. Отсюда следует, что образ $I(T_1)$ есть I, и $I(T_1)$ — эпиморфизм. Аналогично показывается, что $I(T_2)$ — эпиморфизм. Так как в топосе каждый эпиморфизм является фактор объектом по отношению эквивалентности, то произведение эпиморфизмов — эпиморфизм [18]. Следовательно, морфизм $I(T_1) \times I(T_2) : T_1 \times T_2 \to I \times I \approx I$ — эпиморфизм, и $T_1 \times T_2$ не может быть пустым объектом.

У т в е р ж д е н и е 1.5. Для объекта мощности n полного булева топоса не существует $n+1$ непустых попарно не пересекающихся подобъектов $T_i \subset T$, $i = 1, ..., n+1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что такие подобъекты существуют. Тогда декартово произведение $C = T_1 \times ... \times T_{n+1}$ содержится в декартовой степени T^{n+1}. Согласно утверждению 1.4 объект C непуст. С другой стороны, так как пересечения $T_i \cap T_j$ пусты, то C не пересекается ни с одной из диагоналей $\Delta_{i,j}(T^{n+1})$, и, следовательно, объединение этих диагоналей не пересекается с C, то есть, по определению 1.2, мощность объекта T не меньше $n+1$, что противоречит условию утверждения 1.5. Следовательно, предположение было неверным, и утверждение доказано.

У т в е р ж д е н и е 1.6. Если объект T в полном булевом топосе имеет конечную мощность, то булева алгебра $P(T)$ всех его подобъектов конечна.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть n — мощность объекта T. Предположим, что булева алгебра подобъектов T бесконечна. Тогда существует 2^{n+1} различных подобъектов в T. Рассмотрим конечную булеву подалгебру $B \subset P(T)$, порожденную этими подобъектами. Пусть k — число атомов конечной булевой алгебры B. Так как по теореме Стоуна конечные булевы алгебры изоморфны булевым алгебрам всех подмножеств множества ее атомов, то число элементов в булевой алгебре B равно 2^k. Так как по построению булева алгебра B содержит 2^{n+1} различных элементов, то отсюда следует, что $k > n$. То есть булева алгебра $P(T)$ содержит $k > n$ непустых попарно не пересекающихся элементов, но это противоречит утверждению 1.5. Следовательно, булева алгебра $P(T)$ конечна.

О п р е д е л е н и е 1.5. Объект называется атомарным, если он непуст и у него нет подобъектов, отличных от него самого или пустого подобъекта.

У т в е р ж д е н и е 1.7. Каждый конечный объект в полном булевом топосе представляется в виде канонической прямой суммы своих атомарных подобъектов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Это утверждение следует из предыдущего утверждения о конечности булевой алгебры всех подобъектов конечного объекта и теоремы Стоуна о представлении единицы конечной булевой алгебры в виде канонической суммы ее атомарных элементов.

Итак, пусть теперь T — произвольный объект полного топоса конечного типа, и n — мощность объекта T. Рассмотрим булеву алгебру подобъектов декартовой степени T^n. Пусть $X = \{x_1, ..., x_n\}$ — множество переменных. Рассмотрим в T^n дополнение к областям истинности предикатов $x_i = x_j$ (диагоналям) для всех пар разных переменных из X. Из определения мощности конечного объекта T следует, что так построенный подобъект непуст и, следовательно, (так как T^n — это тоже конечный объект и, по утверждению 1.7, алгебра подобъектов $P(T^n)$ — конечная булева алгебра) содержит атомарный (минимальный непустой) подобъект $A_T \subset T^n$.

О п р е д е л е н и е 1.6. Атомарный подобъект $A_T \subset T^n$, построенный по конечному объекту T полного булевого топоса по правилу, описанному выше, назовем максимальным атомарным объектом над объектом T.

У т в е р ж д е н и е 1.8. Пусть T — произвольный объект полного топоса конечного типа, и A — произвольный атомарный объект, для которого существует морфизм $j : A \to A_T$ в определенный выше атомарный объект A_T. Тогда множество морфизмов $\mathcal{C}(A, T)$ состоит из n элементов, где n — мощность объекта T. То есть $|\mathcal{C}(A, T)| = |T|$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По построению A_T, композиции морфизмов $A_T \xrightarrow{i} T^n \xrightarrow{pr\_k} T$, где i — каноническое вложение подобъекта A_T, и pr_k — проекция декартова произведения на k-ый множитель, различны для различных $k = 1, ..., n$. Так как образ атомарного объекта должен быть атомарным, то $j : A \to A_T$ — эпиморфизм, и, следовательно, все морфизмы $pr_k \circ i \circ j : A \to T$ различны для $k = 1, ..., n$.

С другой стороны, множество морфизмов $\mathcal{C}(A, T)$ находится во взаимно однозначном соответствии с множеством морфизмов $(i \circ j, f) : A \to T^n \times T$, где f — произвольный морфизм из $\mathcal{C}(A, T)$, так как по определению произведения пары $(i \circ j, f)$ и $(i \circ j, f')$ равны, если они равны покоординатно. Образом A относительно морфизма $i \circ j$ является A_T. Обозначим через A' атом — образ атома A относительно морфизма $(i \circ j, f)$. Пусть $p_{A'}(x_1, ..., x_n, x')$ предикат (морфизм из $T^n \times T$ в Ω) с подобластью истинности $A' \subset T^n \times T$. По построению подобласти A_T и предиката $p_{A'}$ выполняются равенства $p_{A'}(x_1, ..., x_n, x') \wedge (x_i \neq x_j) = p_{A'}(x_1, ..., x_n, x')$ для любых пар разных переменных из множества $X = \{x_1, ..., x_n\}$. Так как область истинности предиката $p_{A'}$ атомарна, то предикат $p_{A'} \wedge (x_i \neq x')$ либо ложен, либо совпадает с $p_{A'}$. Если выполняется равенство $p_{A'} \wedge (x_i \neq x') = p_{A'}$, то будем говорить, что у предиката $p_{A'}$ значения переменных x_i и x' не равны. Если выполняется равенство $p_{A'} \wedge (x_i \neq x') = false$, то будем говорить, что у предиката $p_{A'}$ значения переменных x_i и x' равны. Из определения мощности следует, что не существует предикатов на $T^n \times T$ с непустой областью истинности, у которого значения переменных попарно не равны для числа переменных больше, чем n. Поэтому для предиката $p_{A'}$ среди переменных $x_1, ..., x_n, x'$ обязательно есть переменные, принимающие равные значения. Так как $x_1, ..., x_n$ попарно не равны, то переменная x' в предикате $p_{A'}$ равна некоторой переменной из $x_1, ..., x_n$, например x_k. То есть коммутативна следующая диаграмма морфизмов:

$$\begin{array}{ccccc}
A & \xrightarrow{j} & A_T & \xrightarrow{i} & T^n \\
|| & & || & & \downarrow (id(T^n), pr_k) \\
A & \xrightarrow{j} & A_T & \xrightarrow{(i,f)} & T^n \times T
\end{array}$$

Тем самым доказано, что любой морфизм $f : A \to T$ совпадает с $pr_k \circ i \circ j$ для некоторого k. Что завершает доказательство утверждения 1.8.

У т в е р ж д е н и е 1.9. Для любого объекта T полного топоса конечного типа $\mathcal{C}$ и любого атомарного объекта A этой категории выполняется следующее неравенство $|\mathcal{C}(A,T)| \le |T|$, где $|\mathcal{C}(A,T)|$ — мощность множества морфизмов, а $|T|$ — мощность объекта.

Доказательство. Рассмотрим декартово произведение $A \times A_T$, где A_T — атомарный объект, построенный в соответствии с определением 1.6. Так как в полной категории произведение непустых объектов непусто (см. утверждение 1.4), то существует атомарный объект $A' \subset A \times A_T$. Композиция этого вложения с проекцией на первый сомножитель дает морфизм $A' \to A$. Так как образ непустого объекта непуст, и A — атомарный объект, то этот морфизм — эпиморфизм и, следовательно, имеется вложение $\mathcal{C}(A,T) \hookrightarrow \mathcal{C}(A',T)$. Отсюда $|\mathcal{C}(A,T)| \le |\mathcal{C}(A',T)|$. С другой стороны, композиция вложения $A' \subset A \times A_T$ с проекцией на второй сомножитель дает морфизм $A' \to A_T$. Применяя утверждение 1.8, получим равенство $|\mathcal{C}(A',T)| = |T|$. Сопоставив это равенство с предыдущим неравенством, получим требуемое в утверждении 1.9 неравенство.

Утверждение 1.10. Пусть T — произвольный объект полного топоса конечного типа, и A_T — максимальный атомарный объект над объектом T, построенный по определению 1.6. Тогда для любого атомарного подобъекта $A \subset T^k$ существует эпиморфизм $A_T \to A$, где k — произвольное натуральное число.

Доказательство. Пусть $A \subset T^k$ — произвольный атомарный подобъект объекта T^k. Так как A_T и A — атомы, то они непусты и, согласно утверждению 1.4, непусто их декартово произведение $A_T \times A$. Рассмотрим атом A' в декартовом произведении $A_T \times A \subset T^n \times T^k$. Композиции вложения $A' \subset A_T \times A$ с проекциями дают морфизмы $A' \to A_T$ и $A' \to A$. Так как образ атома в полном булевом топосе является атомом, то, тем самым, построены эпиморфизмы из A' на A_T и A. Для доказательства утверждения достаточно показать, что существует морфизм из A_T на A', тогда композиция этого морфизма с построенным морфизмом из A' на A даст требуемый морфизм.

Для доказательства существования морфизма из A_T на A' введем обозначения. Обозначим через $p_{A'}(x_1,...,x_n,x'_1,...,x'_k)$ предикат (морфизм из $T^n \times T^k$ в Ω) с подобластью истинности $A' \subset T^n \times T^k$. По построению подобласти A_T и предиката $p_{A'}$ выполняются равенства

$$p_{A'}(x_1,...,x_n,x'_1,...,x'_k) \wedge (x_i \ne x_j) = p_{A'}(x_1,...,x_n,x'_1,...,x'_k)$$

для любых пар разных переменных из множества $X = \{x_1,...,x_n\}$. Так как область истинности предиката $p_{A'}$ атомарна, то предикат $p_{A'} \wedge (x_i \ne$

x'_j) либо ложен, либо совпадает с $p_{A'}$. Если выполняется равенство $p_{A'} \wedge (x_i \neq x'_j) = p_{A'}$, то будем говорить, что у предиката $p_{A'}$ значения переменных x_i и x'_j не равны. Если выполняется равенство $p_{A'} \wedge (x_i \neq x'_j) = false$, то будем говорить, что у предиката $p_{A'}$ значения переменных x_i и x'_j равны.

Из определения мощности следует, что не существует предикатов на $T^n \times T^k$ с непустой областью истинности , у которых значения переменных попарно неравны для числа переменных больше, чем n. Поэтому для предиката $p_{A'}$ среди переменных $(x_1, ..., x_n, x'_j)$, для $j = 1, ..., k$, обязательно есть переменные,принимающие равные значения. Так как $x_1, ..., x_n$ попарно не равны, то переменная x'_j равна некоторой переменной из $x_1, ..., x_n$, которую мы обозначим через $\varphi(x'_j)$.

Рассмотрим морфизм ϕ из декартова произведения $T^n = T_{x_1} \times ... \times T_{xn}$ в декартово произведение $T^{n+k} = T_{x_1} \times ... \times T_{xk} \times T_{x'_1} \times ... \times T_{x'n}$, где $T_{xi}, T_{x'j}$ — экземпляры объекта T, для $i = 1, ..n$ и $j = 1, ..., k$, такой, что композиция морфизма ϕ с проекцией T^{n+k} на T_{xi} совпадает с проекцией T^n на T_{xi}, а композиция морфизма ϕ с проекцией T^{n+k} на $T_{x'j}$ совпадает с проекцией T^n на $T_{\varphi(x'j)}$. По построению, образ подобъекта $A_T \subset T^n$ относительно морфизма ϕ содержится в подобъекте $A' \subset T^{n+k}$. (Заметим, кроме того, что по построению композиция ограничения морфизма ϕ на A_T, то есть $\phi|_{AT} : A_T \to A'$, с морфизмом $A' \to A_T$ дает тождественный морфизм на A_T.) Так как в полном булевом топосе образ атома является атомом, то $\phi(A_T) = A'$. Что завершает доказательство утверждения 1.10.

У т в е р ж д е н и е 1.11. Для любых двух морфизмов $j, j' : A \to A_T$ из произвольного атомарного объекта A полного топоса конечного типа в атомарный объект A_T, построенный по определению 1.6, существует морфизм $g : A_T \to A_T$, что j' равен композиции морфизмов j и g, то есть $j' = g \circ j$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим морфизм $A \to T^n \times T^n$, который является композицией морфизмов $A \overset{(j,j')}{\to} A_T \times A_T$ и $A_T \times A_T \subset T^n \times T^n$, где n — мощность объекта T. Обозначим через A' образ этого морфизма в объекте $T^n \times T^n$. Так как A — атомарный объект, то и $A' \subset T^n \times T^n$ — атомарный подобъект. Повторяя рассуждения доказательства предыдущего утверждения, построим морфизм $\phi : T^n \to T^n \times T^n$, композиция которого с проекцией на первый сомножитель есть тождественный морфизм, и образ подобъекта $A_T \subset T^n$ относительно ϕ

есть A'. Отсюда, нетрудно проверить, что требуемый в утверждении 1.11 морфизм g есть композиция ограничения морфизма ϕ на A_T с проекцией $T^n \times T^n$ на второй сомножитель.

С л е д с т в и е 1.12. Для любого объекта T полного топоса конечного типа произвольный морфизм $h : A_T \to A_T$ атомарного объекта A_T является изоморфизмом, и множество всех морфизмов $\mathcal{C}(A_T, A_T)$ образует группу относительно операции композиции.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как A_T атомарный объект, и образ атомарного объекта атомарен,то h — эпиморфизм. С другой стороны, если рассмотреть утверждение 1.11 в случае, когда $A = A_T$, $j' = 1_T$ и $j = h$, то получим, что h имеет левый обратный, то есть h — мономорфизм. Следовательно, h — изоморфизм и $\mathcal{C}(A_T, A_T)$ — группа автоморфизмов объекта A_T.

У т в е р ж д е н и е 1.13. Пусть T_1 и T_2 — произвольные объекты полного топоса конечного типа $\mathcal{C}$. Тогда мощность копроизведения $T_1 \sqcup T_2$ равна сумме мощностей объектов T_1 и T_2, то есть $|T_1 \sqcup T_2| = |T_1| + |T_2|$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем обозначение $T_3 = T_1 \sqcup T_2$. Рассмотрим атомарный подобъект A в декартовом произведении $A_{T_3} \times A_{T_1} \times A_{T_2}$, где A_{T_3}, A_{T_1}, A_{T_2} — атомарные объекты, построенные по определению 1.6 из соответствующих объектов. Композиции этого вложения с проекциями дадут морфизмы $A \to A_{T_3}$, $A \to A_{T_1}$, $A \to A_{T_2}$. Отсюда и по утверждению 1.8, имеем равенства: $|\mathcal{C}(A, T_1 \sqcup T_2)| = |T_1 \sqcup T_2|$, $|\mathcal{C}(A, T_1)| = |T_1|$, $|\mathcal{C}(A, T_2)| = |T_2|$.

С другой стороны, так как A — атом, то образ морфизма из A в $T_1 \sqcup T_2$ должен лежать либо в T_1, либо в T_2, поэтому $\mathcal{C}(A, T_1 \sqcup T_2) \approx \mathcal{C}(A, T_1) \sqcup \mathcal{C}(A, T_2)$. Отсюда и из предыдущих равенств следует требуемое в утверждении 1.13 равенство.

У т в е р ж д е н и е 1.14. Для любых двух объектов T_1 и T_2 полного топоса конечного типа мощность объекта $T_1 \times T_2$ — произведения объектов T_1 и T_2, равна произведению мощностей объектов T_1 и T_2, то есть $|T_1 \times T_2| = |T_1| * |T_2|$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем обозначение $T_3 = T_1 \times T_2$. Рассмотрим атомарный подобъект A декартова произведения атомарных объектов A_{T_3}, A_{T_1} и A_{T_2}, которые строятся для объекта T_3, T_1 и T_2 согласно определению 1.6. Композиции вложения с проекциями являются морфизмами из A в A_{T_3}, A_{T_1} и A_{T_2}. Отсюда, согласно утверждению 1.8, имеем равенства:

$$|\mathcal{C}(A, T_1 \times T_2)| = |T_1 \times T_2|, |\mathcal{C}(A, T_1)| = |T_1| \text{ и } |\mathcal{C}(A, T_2)| = |T_2|.$$

С другой стороны, по определению декартова произведения имеем биекцию

$$\mathcal{C}(A, T_1 \times T_2) \approx \mathcal{C}(A, T_1) \times \mathcal{C}(A, T_2).$$

Отсюда и из предыдущих трех равенств получаем требуемое в утверждении 1.14 равенство.

У т в е р ж д е н и е 1.15. Для любых двух объектов T_1 и T_2 полного топоса конечного типа мощность объекта $T_1 \Rightarrow T_2$ — экспоненциала объектов T_1 и T_2, равна мощности объекта T_2 в степени мощности объекта T_2, то есть $|T_1 \Rightarrow T_2| = |T_2|^{|T_1|}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $T_3 = T_1 \times T_2$, A_{T_3}, A_{T_1} и A_{T_2} те же объекты, что и в доказательстве утверждения 1.14. Обозначим через A — атомарный объект над копроизведением атомарных объектов $A_{T_3} \sqcup A_{T_1} \sqcup A_{T_2}$. Согласно утверждению 1.10, где T полагается равным $A_{T_3} \sqcup A_{T_1} \sqcup A_{T_2}$, $A_T = A$ и $k = 1$, существуют морфизмы из A в A_{T_3}, A_{T_1} и A_{T_2}. Отсюда, согласно утверждению 1.8 имеем равенства $|\mathcal{C}(A, T_1)| = |T_1|$ и $|\mathcal{C}(A, T_2)| = |T_2|$. С другой стороны, по определению экспоненциала объектов имеем биекцию множеств

$$\mathcal{C}(A, T_1 \Rightarrow T_2) \approx \mathcal{C}(A \times T_1, T_2).$$

Согласно утверждению 1.7 объект $A \times T_1$ представляется в виде конечной прямой суммы своих атомов, то есть $A \times T_1 = A_1 \sqcup ... \sqcup A_k$. С другой стороны, каждый атом $A_i \subset A \times T_1$ изоморфен A, так как композиция вложения A_i с проекцией $A \times T_1$ на первый сомножитель дает морфизм $q_i : A_i \to A$ из A_i на A, а по утверждению 1.10 существует морфизм $p_i : A \to A_i$ из A на A_i. Обозначим через $g_i : A \to A$ композицию морфизмов p_i и q_i, то есть $g_i = q_i \circ p_i$. Так как, в соответствии со следствием 1.12, все морфизмы из A в A изоморфизмы, то существует g_i^{-1} и $g_i^{-1} \circ q_i \circ p_i = 1_A$. Отсюда, так как p_i имеет левый обратный, морфизм p_i — мономорфизм. С другой стороны, так как образ атомарного объекта атомарен, то p_i — эпиморфизм. Следовательно, A_i изоморфны A, для $i = 1, ..., k$. Таким образом, $A \times T_1 \approx kA$. Для определения числа k рассмотрим подобъект $A \subset A \times T_1$. Композиция вложения с проекцией на первый сомножитель дает тождественный морфизм, а композиция с проекцией на второй сомножитель дает некоторый морфизм $f : A \to T_1$. Отсюда, каждый такой подобъект $A \subset A \times T_1$ является графиком некоторого морфизма. С другой стороны, для любых двух морфизмов $f_1, f_2 : A \to T_1$ их графики являются атомами, изоморфными A, и они либо совпадают (в этом случае $f_1 = f_2$), либо не пересекаются. Таким образом, подобъекты $f : A \to T_1$ находятся во взаимно однозначном соответствии с морфизмами $f : A \to T_1$, и число k равно мощности множества $\mathcal{C}(A, T_1)$, которое по утверждению 1.8 равно $|T_1|$. Итак, доказан изоморфизм $A \times T_1 \approx |T_1|A$. Отсюда и по определению экспоненциала объектов и копроизведения имеем:

$$\mathcal{C}(A, T_1 \Rightarrow T_2) \approx \mathcal{C}(A \times T_1, T_2) \approx \mathcal{C}(|T_1|A, T_2) \approx (\mathcal{C}(A, T_2))^{|T_1|}.$$

Применяя к полученному равенству утверждение 1.8, получим требуемое в утверждении 1.15 равенство $|T_1 \Rightarrow T_2| = |T_2|^{|T_1|}$.

Пусть $\mathcal{C}$ — полный топос конечного типа, и $T_1, ..., T_n$ — конечное множество объектов категории $\mathcal{C}$ таких, что они и некоторые морфизмы между ними являются образующими категории $\mathcal{C}$. Рассмотрим копроизведение этих объектов $D = T_1 \sqcup ... \sqcup T_n$. Так как T_i, для $i = 1, ..., n$, по условию конечные объекты, то и D — конечный объект (утверждение 1.13). Построим атомарный объект A_D категории $\mathcal{C}$ по объекту D в соответствии с определением 1.6. и рассмотрим полную подкатегорию $\mathcal{C}_{A_D}$ категории $\mathcal{C}$, состоящую из объектов T, для которых выполняются равенство $|T| = |\mathcal{C}(A_D, T)|$.

У т в е р ж д е н и е 1.16. Подкатегория $\mathcal{C}_{A_D}$ полного топоса конечного типа $\mathcal{C}$ совпадает с $\mathcal{C}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что $I \in \mathcal{C}_{A_D}$ и $\Omega = I \sqcup I \in \mathcal{C}_{A_D}$. Докажем, что все образующие $T_1, ..., T_n$ алгебраического топоса $\mathcal{C}$ также принадлежат $\mathcal{C}_{A_D}$. Согласно утверждениям 1.13 и 1.8 имеем равенства $|T_1| + ... + |T_n| = |D| = |\mathcal{C}(A_D, D)|$. С другой стороны, так как A_T — атомарный объект и образ атомарного объекта должен содержаться в одном из слагаемых копроизведения, то

$$|\mathcal{C}(A_D, D)| = |\mathcal{C}(A_D, T_1 \sqcup ... \sqcup T_n)| = |\mathcal{C}(A_D, T_1)| \sqcup ... \sqcup |\mathcal{C}(A_D, T_n)|.$$

По утверждению 1.9 выполняется неравенства $|\mathcal{C}(A_D, T_i)| \leq |T_i|$, для $i = 1, ..., n$. Поэтому полученное ранее равенство $|\mathcal{C}(A_D, D)| = |T_1| + ... + |T_n|$ может выполниться только при условии выполнения равенств $|\mathcal{C}(A_D, T_i)| =$

$|T_i|$, для $i = 1, ..., n$. Таким образом, доказано, что образующие T_i алгебраического топоса $\mathcal{C}$ принадлежат категории $\mathcal{C}_{A_D}$.

В соответствии с определением алгебраического топоса с множеством образующих, для доказательства утверждения 1.16 осталось доказать, что $\mathcal{C}_{A_D}$ — алгебраический топос. То есть осталось доказать, что, если T_1 и T_2 — объекты категории $\mathcal{C}_{A_D}$, то произвольный подобъект $T \subset T_1$, декартово произведение объектов $T_1 \times T_2$ и экспоненциал объектов $T_1 \Rightarrow T_2$ — объекты категории $\mathcal{C}_{A_D}$.

Первое утверждение достаточно очевидно, так как, если бы выполнялось неравенство $|\mathcal{C}(A_D, T)| < |T|$, то выполнялось бы неравенство

$$\begin{aligned} |\mathcal{C}(A_D, T_1)| &= |\mathcal{C}(A_D, T \sqcup T')| = |\mathcal{C}(A_D, T) \sqcup \mathcal{C}(A_D, T')| = \\ &= |\mathcal{C}(A_D, T)| + |\mathcal{C}(A_D, T')| < |T| + |T'| = |T_1|, \end{aligned}$$

где T' — дополнение подобъекта T в T_1. Это неравенство противоречит исходному предположению, что T_1 — объект категории $\mathcal{C}_{A_D}$, то есть выполняется равенство $|\mathcal{C}(A_D, T_1)| = |T_1|$.

Второе утверждение также достаточно очевидно в силу равенства $|T_1 \times T_2| = |T_1| * |T_2|$, которое выполняется по утверждению 1.14, и из равенства

$$\begin{aligned} |\mathcal{C}(A_D, T_1 \times T_2)| &= |\mathcal{C}(A_D, T_1) \times \mathcal{C}(A_D, T_2)| = \\ &= |\mathcal{C}(A_D, T_1)| * |\mathcal{C}(A_D, T_2)| = |T_1| * |T_2|, \end{aligned}$$

которое следует из определения декартова произведения и исходных предположений относительно объектов T_1 и T_2.

Для доказательства оставшегося равенства

$$|\mathcal{C}(A_D, T_1 \Rightarrow T_2)| = |T_1 \Rightarrow T_2|$$

докажем сначала изоморфизм $A_D \times T_1 \approx |T_1| A_D$.

С одной стороны, так как график каждого морфизма $A_D \to T_1$ выделяет подобъект в $A_D \times T_1$, изоморфный A_D, и для разных морфизмов эти подобъекты не пересекаются в силу атомарности A_D, имеем мономорфизм $|\mathcal{C}(A_D, T_1)| A_D \hookrightarrow A_D \times T_1$. Заметим, что по предположению $|\mathcal{C}(A_D, T_1)| = |T_1|$. Для доказательства, что этот мономорфизм является изоморфизмом покажем, что дополнение этого подобъекта пусто. Если бы дополнение было непусто, то, по утверждению 1.13, мощность объекта должна быть строго больше мощности подобъекта, но, согласно утверждению 1.13, мощность подобъекта равна $||T_1|A_D| = |T_1| * |A_D|$, а мощность объекта, согласно утверждению 1.14, $|A_D \times T_1| = |A_D| * |T_1|$. То есть они совпадают, и $A_D \times T_1 \approx |T_1|A_D$.

З а м е ч а н и е 1.2. В [18] рассматривалось понятие локально постоянного конечного объекта в топосе $\mathcal{C}$. Объект T в топосе называется локально постоянно конечным, если существует такой объект V, имеющий глобальный носитель (то есть образ морфизма $V \to I$ в финальный объект совпадает со всем I), что декартово произведение $T \times V$ вместе с проекцией на второй сомножитель изоморфно копроизведению конечного числа финальных объектов в топосе $\mathcal{C}_V$ — локализации топоса $\mathcal{C}$ над объектом V (то есть $T \times V \approx V \sqcup ... \sqcup V$, причем проекция на V переходит в копроизведение тождественных морфизмов $id(V) \sqcup ... \sqcup id(V)$). Доказанный только что изоморфизм $A_D \times T_1 \approx |T_1|A_D$ по сути показывает, если взять $T = T_1$ и $V = A_T$, что в топосе конечного типа все объекты локально постоянно конечны.

Рассмотрим, теперь, $|T_1 \Rightarrow T_2|$. В силу утверждения 1.15 имеем равенство $|T_1 \Rightarrow T_2| = |T_2|^{|T_1|}$. С другой стороны, по определению экспоненциала объектов, в силу доказанного выше изоморфизма, по определению копроизведения и в силу исходного предположения об объектах, имеем равенство:

$$\begin{aligned} |\mathcal{C}(A_D, T_1 \Rightarrow T_2)| &= |\mathcal{C}(A_D \times T_1, T_2)| = |\mathcal{C}(|T_1|A_D, T_2)| = \\ &= |\mathcal{C}(A_D, T_2)|^{|T_1|} = |T_2|^{|T_1|}. \end{aligned}$$

Из последних двух равенств следует требуемое равенство.

Итак, пусть $\mathcal{C}$ — полный топос конечного типа и A_D атомарный объект предыдущего утверждения. Согласно утверждению следствия 1.12 множество всех морфизмов $\mathcal{C}(A_D, A_D)$ образует конечную группу относительно операции композиции. Обозначим эту группу через G. Рассмотрим представимый функтор $F(-) = \mathcal{C}(A_D, -)$ из категории $\mathcal{C}$ в категорию $GFinset$, который каждому объекту T категории $\mathcal{C}$ сопоставляет множество $\mathcal{C}(A_D, T)$, на котором естественно действует группа $G = \mathcal{C}(A_D, A_D)$ композицией соответствующих морфизмов.

Как следует из утверждений 1.16, 1.13, 1.14, 1.15, это точный функтор, который сохраняет копроизведения, пустой объект, экспоненциалы объектов, классификатор подобъектов.

У т в е р ж д е н и е 1.17. Пусть $\mathcal{C}$ — полный топос конечного типа и $F : \mathcal{C} \to GFinset$ — функтор, определенный выше. Для любого морфизма

$f : T_1 \to T_2$ категории $\mathcal{C}$, если $F(f)$ — взаимно однозначное отображение, то f — изоморфизм.

Доказательство. Так как функтор F сохраняет копроизведения, то это утверждение достаточно доказать для атомарных объектов. В этом случае, так как образ атомарного объекта — атомарный объект и T_2 — атомарный объект, то f — эпиморфизм. Чтобы показать, что f — мономорфизм, рассмотрим два морфизма $t_1 : T \to T_1$ и $t_2 : T \to T_1$, композиции которых с морфизмом f совпадают. Так как, согласно утверждению 1.7, всякий объект в категории $\mathcal{C}$ представляется в виде копроизведения конечного числа атомов, то достаточно рассмотреть случай, когда T — атомарный объект. Рассмотрим некоторый морфизм $t : A_D \to T$. Так как T — атомарный объект, то t эпиморфизм, и разным морфизмам t_1, t_2 соответствуют разные морфизмы $t_1 \circ t$, $t_2 \circ t$ — элементы множества $F(T_1)$. Но $F(f)$ по предположению взаимно однозначное отображение, и, следовательно, должны быть различными морфизмы $f \circ t_1 \circ t$ и $f \circ t_2 \circ t$, что противоречит предположению равенства $f \circ t_1 = f \circ t_2$. Таким образом, f — мономорфизм и эпиморфизм и, следовательно, изоморфизм.

Определение 1.7. (Гротендик [58], V 5.1) Категорией Галуа называется пара $(\mathcal{G}, F)$, где $\mathcal{G}$ — малый булев топос, а $F : \mathcal{G} \to Finset$ — точный функтор, отражающий изоморфизмы.

Определение 1.8. Группа называется проконечной, если она представляется в виде предела конечных групп по некоторому направленному множеству.

Имеется следующая теорема.

Теорема (Гротендик [58]). Категория Галуа эквивалентна категории $GFinset$ для некоторой проконечной группы G.

Если $\mathcal{C}$ — полный топос конечного типа, то, согласно утверждению 1.17, пара $(\mathcal{C}, F)$ — категория Галуа и, по теореме Гротендика, он изоморфен топосу $GFinset$ для некоторой проконечной группы G. Утверждение теоремы 1.3 несколько более сильное. В ней утверждается, что в этом случае группа является конечной.

Доказательство теоремы 1.3. Пусть, как и раньше, $\mathcal{C}$ — полный топос конечного типа; $T_1, ..., T_n$ — конечное множество объектов категории $\mathcal{C}$ таких, что они и некоторые морфизмы между ними являются образующими категории $\mathcal{C}$; $D = T_1 \sqcup ... \sqcup T_n$, G — группа автоморфизмов атомарного объекта A_D, построенного по определению 1.6 из объекта D; и $F : \mathcal{C} \to GFinset$ — функтор $F(-) = \mathcal{C}(A_D, -)$.

В утверждениях 1.13–1.17 было показано, что F — точный функтор, сохраняющий копроизведения, экспоненциалы объектов и отражающий изоморфизмы. Для доказательства теоремы 1.3 осталось показать, что для любого G-множества M существует объект T, что $F(T)$ изоморфен M, и для любых двух объектов X_1 и X_2 топоса $\mathcal{C}$, если существует G-отображение из $F(X_1)$ в $F(X_2)$, то существует морфизм $X_1 \to X_2$, представляющий это отображение. Так как функтор F сохраняет копроизведения, то эти утверждения достаточно доказать для атомарных объектов.

Любой атомарный объект M в $GFinset$ имеет вид G/H, где H — произвольная подгруппа в G. Поэтому в качестве требуемого объекта T в этом случае можно взять копредел конечной диаграммы морфизмов $h : A_D \to A_D$, для $h \in H \subset G = \mathcal{C}(A_D, A_D)$, в топосе $\mathcal{C}$, который будет обозначаться через A_D/H.

Если X_1 и X_2 — атомарные объекты в $\mathcal{C}$, то, как следует из утверждения 1.16, они являются образами объекта A_D, и группа G транзитивно действует на $F(X_1)$ и $F(X_2)$, то есть $F(X_1) = G/H_1$, $F(X_2) = G/H_2$. Если есть G-отображение $G/H_1 \to G/H_2$, то H_1 — подгруппа в H_2. Соответственно, $X_1 \approx A_D/H_1$ и $X_2 \approx A_D/H_2$. Так как H_1 — подгруппа в H_2, то диаграмма множества морфизмов $h : A_D \to A_D$, для $h \in H_1$, является поддиаграммой множества морфизмов $h : A_D \to A_D$, для $h \in H_2$, и это вложение диаграмм определяет требуемый морфизм их копределов $A_D/H_1 \to A_D/H_2$ в топосе $\mathcal{C}$. Это завершает доказательство теоремы 1.3.

Рассмотрим, теперь, конечно порожденный алгебраический подтопос топоса $Finset$. Так как такой подтопос булев полон и конечного типа, то, по теореме 1.3, он эквивалентен топосу $GFinset$ для некоторой группы G. Хотелось бы понять, нет ли более явного способа построения группы G.

Итак, пусть подтопос $\mathcal{C}$ топоса $Finset$, порожден конечным множеством несущих множеств $D_1, ..., D_n$, и конечными множествами функций и отношений $f_1, ..., f_k$; $r_1, ..., r_m$ на множествах, построенных из несущих множеств операциями топоса.

Обозначим, как и в разделе 6 главы 1, через $D = D_1 \sqcup ... \sqcup D_n$ разъединенное объединение несущих множеств, а через $S(D)$ множество всех взаимно однозначных отображений D на себя, отображающих каждое несущее подмножество в себя. Очевидно, что $S(D)$ образует группу относительно композиции отображений.

По сути, каждый элемент $h \in S(D)$ определяет перестановку элементов множества D, и действие этой перестановки можно воспринимать просто, как переименование элементов множества D. Это переименование действует на множествах $D_1, ..., D_n$ и естественно может быть продолжено на все множества, построенные из $D_1, ..., D_n$ операциями топоса. При этом, некоторые множества могут переходить в другие, изоморфные.

Будем говорить, что множество, функция или отношение категории $Finset$ симметрично относительно $h \in S(D)$, если они под действием h переходят в себя.

Обозначим через $S(\mathcal{C})$ множество всех отображений $h \in S(D)$, относительно которых симметричны функции $f_1, ..., f_k$ и отношения $r_1, ..., r_m$ — образующие категории $\mathcal{C}$. Очевидно, что множество отображений $S(\mathcal{C})$ образует подгруппу в $S(D)$, которая мы будем называть группой симметрии образующих топоса $\mathcal{C}$.

Непосредственной проверкой можно доказать, что, если все множества, отношения и функции, используемые в некоторой операции топоса, симметричны относительно h (инвариантны относительно переименования элементов, заданного отображением h), то и результат этой операции инвариантен относительно h. Отсюда следует следующее утверждение.

У т в е р ж д е н и е 1.18. Группа симметрии $S(\mathcal{C})$ образующих топоса $\mathcal{C} \subset Finset$ действует на каждом множестве из категории $\mathcal{C}$, и каждое отображение из категории $\mathcal{C}$ инвариантно относительно этого действия, то есть является $S(\mathcal{C})$-отображением. Другими словами категория $\mathcal{C}$ является подкатегорией топоса $GFinset$, где $G = S(\mathcal{C})$.

На самом деле, это вложение является эквивалентностью топосов, так как саму группу $G = S(\mathcal{C})$ можно построить в $\mathcal{C}$ используя операции топоса, как подобъект $D \Rightarrow D$, удовлетворяющий условиям группы симметрии конечного множества отображений и отношений — образующих топоса $\mathcal{C}$.

В результате получим следующую теорему.

Т е о р е м а 1.19. Любой подтопос $\mathcal{C}$ топоса $Finset$, порожденный конечным множеством несущих множеств $D_1, ..., D_n$, и конечными множествами функций и отношений $f_1, ..., f_k$; $r_1, ..., r_m$ на множествах, построенных из несущих множеств операциями топоса, совпадает с подтопосом G-множеств, где $G = S(\mathcal{C})$ — группа симметрии образующих топоса $\mathcal{C}$.

Рассмотрим, теперь, топосы конечного типа без условия полноты.

Т е о р е м а 1.20. Пусть $\mathcal{C}$ — произвольный топос конечного типа. Тогда существует такой конечный набор конечных групп $G_1, ..., G_k$, что категория $\mathcal{C}$ эквивалентна конечному произведению топосов $G_iFinset$, для $i = 1, ..., k$, то есть $\mathcal{C} \approx G_1Finsen \times ... \times G_kFinset$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть I — финальный объект топоса $\mathcal{C}$. Рассмотрим множество его подобъектов. Так как топос булев, то подобъекты объекта I образуют некоторую булеву алгебру B. Согласно теореме Стоуна каждая булева алгебра B вкладывается в полную булеву алгебру $\bar{B}$, атомами которой являются максимальные ультрафильтры алгебры B.

Напомним, что ультрафильтром булевой алгебры называется множество элементов булевой алгебры B, дополнения которых образуют идеал булевой алгебры B. Другими словами, $\Phi \subset B$ — ультрафильтр, если выполняются следующие условия:

Φ не содержит 0 булевой алгебры;

если $b_1 \in \Phi$, то любой больший элемент $b \supset b_1$ также принадлежит Φ;

если $b_1, b_2 \in \Phi$, то $b_1 \cap b_2 \in \Phi$.

Для любого подобъекта $b \subset I$ рассмотрим подкатегорию $\mathcal{C}_b \subset \mathcal{C}$ объектов над b вида $T \to b$. Если $b2 \subset b1 \subset I$, то стандартным образом определим функтор локализации $L^{b1}_{b2} : \mathcal{C}_{b1} \to \mathcal{C}_{b2}$, который объекту $T \to b1$ сопоставляет предел диаграммы

$$\begin{array}{ccc} & & T \\ & & \downarrow \\ b2 & \subset & b1. \end{array}$$

Известно (см., например, [18]), что функторы локализации L^{b1}_{b2} сохраняют все операции топоса. Кроме того, заметим, что функтор L^I_b переводит образующие топоса $\mathcal{C}$ в образующие топоса $\mathcal{C}_b$, и прямой предел $\mathcal{C}_\Phi$ топосов конечного типа $\mathcal{C}_b$, для $b \in \Phi$, где Φ — максимальный ультрафильтр, является полным топосом конечного типа. Отсюда, по теореме 1.3, каждый топос $\mathcal{C}_\Phi$ с выделенным в нем множеством образующих, соответствующих множеству образующих топоса $\mathcal{C}$, эквивалентен некоторому топосу $GFinset$ для подходящей группы G. Таким образом, $GFinset \approx \mathcal{C}_\Phi$ — это предел топосов $\mathcal{C}_b$ по множеству объектов $b \in \Phi$, принадлежащих максимальному ультрафильтру Φ и $L_\Phi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_\Phi$ — гомоморфизм алгебраических топосов, построенный по определению предела.

Композиции построенных функторов $\mathcal{C} \to \mathcal{C}_\Phi \approx GFinset$ со стирающим функтором $GFinset \to Finset$, который каждому конечному G-множеству сопоставляет его же, но в категории $Finset$, дает функтор $M_\Phi : \mathcal{C} \to Finset$. Функтор M_Φ естественно назвать моделью топоса $\mathcal{C}$ в категории конечных множеств, построенной по максимальному ультрафильтру Φ.

Такие модели строятся по ультрафильтру Φ с точностью до изоморфизма. Напомним, что две модели $M : \mathcal{C} \to Finset$ и $M' : \mathcal{C} \to Finset$ называются эквивалентными, если существует естественное преобразование функторов $h : M \to M'$, что для любого объекта T топоса $\mathcal{C}$ отображение $h(T) : M(T) \to M'(T)$ является взаимно однозначным.

Покажем, теперь, что для топосов конечного типа, множество максимальных ультрафильтров конечно. Пусть Φ и Φ' два различных ультрафильтра топоса конечного типа $\mathcal{C}$. Так как $\Phi \neq \Phi'$, то существует такой элемент $b \in \Phi$, что $b \notin \Phi'$. Отсюда, $L_\Phi(b) = I$, где I — финальный объект топоса $\mathcal{C}_\Phi \approx GFinset$, и $L_{\Phi'}(b) = \emptyset$, где $\emptyset$ инициальный объект топоса $\mathcal{C}_{\Phi'} \approx G'Finset$. Таким образом, для разных максимальных ультрафильтров Φ и Φ' модели M_Φ и $M_{\Phi'}$, построенные по ним, не могут быть изоморфными. С другой стороны, если $T_1, ..., T_n$ — конечное множество объектов категории $\mathcal{C}$ таких, что они и некоторое конечное число морфизмов между ними являются образующими категории $\mathcal{C}$, и M — произвольная модель топоса $\mathcal{C}$, то для набора множеств $D_1, ..., D_n$ той же мощности, что и множества $M(T_1), ..., M(T_n)$, то есть $|D_i| = |M(T_i)|$, для $i = 1, ..., n$, существует модель M', изоморфная модели M, с несущими множествами $M'(T_i) = D_i$, для $i = 1, ..., n$. Такая модель строится просто переименованием элементов у несущих множеств модели $h_i : M(T_i) \to D_i$, где h_i — взаимно однозначное отображение, для $i = 1, ..., n$. Таким образом, каждая модель с фиксированной мощностью несущих множеств изоморфна некоторой модели с несущими множествами $D_1, ..., D_n$, а так как $\mathcal{C}$ имеет конечное множество образующих, которые в модели реализуются элементами некоторых конечных множеств, построенных из множеств $D_1, ..., D_n$, то таких моделей конечное число. Учитывая, что $\mathcal{C}$ — топос конечного типа, и мощности объектов $T_1, ..., T_n$ ограничены сверху, окончательно получим, что множество неизоморфных моделей топоса $\mathcal{C}$ конечное число и, следовательно число максимальных ультрафильтров в булевой алгебре B подобъектов финального объекта I топоса $\mathcal{C}$ конечно.

Из конечности числа максимальных ультрафильтров булевой алгебры B в свою очередь следует, что B — конечная булева алгебра. Пусть $At(B)$ конечное множество всех атомарных элементов булевой алгебры B. Далее, нетрудно видеть, что топос конечного типа $\mathcal{C}$ изоморфен конечному произведению полных топосов конечного типа $\mathcal{C}_a$ по множеству $a \in At(B)$, где B — конечная булева алгебра подобъектов финального объекта топоса $\mathcal{C}$. Это завершает доказательство теоремы 1.20.

2 Рефлексивные топосы

Если категорными средствами нужно отражать знания не только о внешнем мире, но и о самих средствах представления знаний, и о всей системе представления знаний в целом, то понадобится расширение операций топоса, приводящее к понятию рефлексивного топоса, определяемого ниже.

Пусть $\mathcal{C}$ — топос, в котором выделены два объекта NOb и $NMor$, которые называются область имен объектов и область имен морфизмов, соответственно.

Множества элементов объектов NOb и $NMor$, то есть множества $\mathcal{C}(I, NOb)$ и $\mathcal{C}(I, NMor)$, где I — финальный объект категории $\mathcal{C}$, называются множеством имен объектов и множеством имен морфизмов, соответственно.

Пусть имеются также морфизмы между объектами NOb и $NMor$, которые задают структуру внутренней категории [18]. То есть заданы морфизмы

$$e : NOb \to NMor, \quad ndom : NMor \to NOb, \quad ncodom : NMor \to NOb,$$

где e соответствует отображению, сопоставляющему объекту тождественный морфизм, а морфизмы $ndom$ и $ncodom$ соответствуют отображениям, которые морфизму сопоставляют объекты — откуда и куда этот морфизм действует.

По смыслу этих морфизмов между ними должны выполняться соотношения:

$$ndom \circ e = id(NOb), \quad ncodom \circ e = id(NOb),$$

которые означают, что имена области определения и области значений для имени тождественного морфизма совпадают с именем объекта этого морфизма.

Обозначим через $\mathcal{M}2$ объект в категории $\mathcal{C}$, который получается операцией уравнитель пары морфизмов $ndom \circ pr_1$ и $ncodom \circ pr_2$ из произведения объектов $NMor \times NMor$ в NOb, где pr_1 — проекция произведения $NMor \times NMor$ на первый сомножитель, а pr_2 — проекция на второй сомножитель. То есть $\mathcal{M}2$ — это подобъект в $NMor \times NMor$, состоящий из тех пар имен морфизмов, у которых имя области определения первой компоненты пары совпадает с именем области значений второй.

Пусть в категории $\mathcal{C}$ задан морфизм вида

$$com\_n : \mathcal{M}2 \to NMor,$$

который называется композицией имен морфизмов. Предполагается также, что для морфизмов $com\_n, ndom, ncodom, e$ выполняются соотношения, являющиеся аналогами аксиом теории категорий, то есть $Name\_Cat = (NOb, NMor, com\_n, ndom, ncodom, e)$ — внутренняя категория [18] категории $\mathcal{C}$. Тогда множества элементов объектов NOb и $NMor$, то есть множества $\mathcal{C}(I, NOb)$ и $\mathcal{C}(I, NMor)$, где I — финальный объект категории $\mathcal{C}$, и операции на них, индуцированные морфизмами $com\_n, ndom, ncodom, e$, по определению внутренней категории образуют малую категорию. Эту малую категорию обозначим здесь через $NCat$ и назовем категорией имен.

Определение 2.1. Топос $\mathcal{C}$ вместе с внутренней категорией $Name\_Cat$ называется топосом с категорией имен.

Определение 2.2. Топос $\mathcal{C}$ вместе с внутренней категорией $Name\_Cat$ называется рефлексивным топосом, если существуют функторы $Name : \mathcal{C} \to NCat$ и $Denote : NCat \to \mathcal{C}$ такие, что их композиция $Denote \circ Name = 1\mathcal{C}$ является тождественным функтором на $\mathcal{C}$. Функтор $Name$ называется функтором именования, функтор $Denote$ — денотатом, а $NCat$ — категорией имен топоса $\mathcal{C}$.

Напомним, что топос называется непротиворечивым, если элементы $true$ и $false : I \to \Omega$ в классификаторе подобъектов Ω этого топоса различны.

Теорема 2.1 Существует непротиворечивый рефлексивный топос.

Доказательство. Пусть Set — категория всех множеств, в которой определены все категорные операции алгебраического топоса. Так как теория множеств непротиворечива, то классификатор подобъектов Ω в категории множеств Set — это двуточечное множество.

Обозначим через $\mathcal{T}^1$ свободный алгебраический топос, порожденный из пустого множества образующих операциями алгебраического топоса. Конструкция построения $\mathcal{T}^1$ стандартна, так как аксиоматика алгебраического топоса задается хорновскими формулами. Топос $\mathcal{T}^1$ непротиворечив, так как существуют непротиворечивые топосы, которые являются моделями алгебраического топоса $\mathcal{T}^1$. Примером такого топоса является минимальный алгебраический подтопос $Set^1 \subset Set$ топоса множеств, состоящий из множеств и отображений, построенных только из операций топоса, включая нульарные операции топоса. (Нетрудно видеть, что так как в топосе все операции имеют конечную арность, то топос Set^1 эквивалентен топосу конечных множеств.) Так как $\mathcal{T}^1$ — свободный топос с пустым множеством образующих, то имеется единственный гомоморфизм $j^1 : \mathcal{T}^1 \to Set^1$.

Определим, далее, по индукции алгебраические топосы $\mathcal{T}^k$, подтопосы $Set^k \subset Set$ и гомоморфизмы $j^k : \mathcal{T}^k \to Set^k$, где k — произвольное натуральное число.

Пусть уже определены алгебраический топос $\mathcal{T}^k$ подтопос $Set^k \subset Set$ и гомоморфизм $j^k : \mathcal{T}^k \to Set^k$ для некоторого k.

Рассмотрим множества объектов $Ob\mathcal{T}^k$ и морфизмов $Mor\mathcal{T}^k$ категории $\mathcal{T}^k$. Обозначим через Set^{k+1} наименьший алгебраический подтопос топоса множеств $Set^{k+1} \subset Set$, который содержит множества $Ob\mathcal{T}^k$, $Mor\mathcal{T}^k$ и отображения между ними, определяющие категорию $\mathcal{T}^k$.

Алгебраический подтопос $Set^{k+1} \subset Set$ является алгебраическим топосом с категорией имен (см. определение 2.1), где объектом NOb является множество $Ob\mathcal{T}^k$, объектом $NMor$ является множество $Mor\mathcal{T}^k$.

Построим, теперь, алгебраический топос $\mathcal{T}^{k+1} = \mathcal{T}[Ob\mathcal{T}^k, Mor\mathcal{T}^k]$, как алгебраический топос с категорией имен, порожденный множеством образующих вида: $NT : I \to NOb$ и $Nf : I \to NMor$ для каждого $T \in Ob\mathcal{T}^k$ и $f \in Mor\mathcal{T}^k$, и определяющими соотношениями между этими элементами, которые выполняются между соответствующими элементами множеств $Ob\mathcal{T}^k$, $Mor\mathcal{T}^k$ и отображениями между ними, задающими категорию $\mathcal{T}^k$.

Таким образом, по определению алгебры, заданной образующими и соотношениями, существует единственный гомоморфизм алгебраических топосов с категорией имен $j^{k+1} : \mathcal{T}^{k+1} \to Set^{k+1}$, переводящий образующие $NT : I \to NOb$ и $Nf : I \to NMor$ категории $\mathcal{T}^{k+1}$ в элементы $j^{k+1}(NT) : I \to T \in Ob\mathcal{T}^k$ и $j^{k+1}(Nf) : I \to f \in Mor\mathcal{T}^k$ категории Set^{k+1}. Кроме того, из этого определения гомоморфизма j^{k+1} видно, что он является вложением на множестве образующих. Отсюда следует, что множества $Ob\mathcal{T}^k$ и $Mor\mathcal{T}^k$ инъективно отображается в множества элементов объектов NOb и $NMor$ категории $\mathcal{T}^{k+1}$.

Так как подтопос непротиворечивого топоса — непротиворечив, то $Set^k \subset Set$ — непротиворечивы для всех k. С другой стороны, так как имеется гомоморфизм $j^k : \mathcal{T}^k \to Set^k$, и элементы $true$ и $false$ топоса $\mathcal{T}^k$ переходят в элементы $true$ и $false$ топоса Set^k, соответственно, то они не могут совпадать в $\mathcal{T}^k$. То есть топосы $\mathcal{T}^k$ непротиворечивы.

Определим, теперь, по индукции гомоморфизмы $F_k : \mathcal{T}^k \to \mathcal{T}^{k+1}$

алгебраических топосов с категорией имен.

Так как $\mathcal{T}^2$ является расширением алгебраического топоса $\mathcal{T}^1$, то существует единственный гомоморфизм $F_1 : \mathcal{T}^1 \to \mathcal{T}^2$.

Пусть уже определен функтор $F_{k-1} : \mathcal{T}^{k-1} \to \mathcal{T}^k$. Рассмотрим категорию $\mathcal{T}^k = \mathcal{T}[Ob\mathcal{T}^{k-1}, Mor\mathcal{T}^{k-1}]$. Так как категория $\mathcal{T}^k$ является алгебраическим топосом с категорией имен, порожденным множеством образующих и соотношений, то для задания гомоморфизма $F_k : \mathcal{T}^k \to \mathcal{T}^{k+1}$ достаточно задать его на образующих и проверить выполнение определяющих соотношений. Положим, так как F_k должен быть гомоморфизмом, F_k сопоставляет объектам NOb и $NMor$ категории $\mathcal{T}^k$ объекты NOb и $NMor$ категории $\mathcal{T}^{k+1}$, а образующим топоса $\mathcal{T}^k$ (то есть элементам объектов NOb и $NMor$) — соответствующие элементы объектов NOb и $NMor$ категории $\mathcal{T}^{k+1}$ в соответствии с сопоставлением, определенным функтором F_{k-1}. Определяющие соотношения при этом выполняются, так как по индуктивному предположению F_{k-1} — функтор.

Итак, имеем индуктивную последовательность гомоморфизмов непротиворечивых алгебраических топосов с категорией имен вида:

$$\mathcal{T}^2 \overset{F_2}{\to} \mathcal{T}^3 \overset{F_3}{\to} \dots \overset{Fk-1}{\to} \mathcal{T}^k \overset{Fk}{\to} \dots$$

Обозначим через $\mathcal{T}^\infty$ индуктивный предел этой последовательности гомоморфизмов, а через $G_k : \mathcal{T}^k \to \mathcal{T}^\infty$ — отображения членов последовательности $\mathcal{T}^k$ в индуктивный предел $\mathcal{T}^\infty$, входящие в определение этого предела. Множество объектов $Ob\mathcal{T}^\infty$ категории $\mathcal{T}^\infty$ представляет собой индуктивный предел множеств $Ob\mathcal{T}^k$ при отображениях $F_k^{Ob} : Ob\mathcal{T}^k \to Ob\mathcal{T}^{k+1}$, а множество морфизмов $Mor\mathcal{T}^\infty$ категории $\mathcal{T}^\infty$ представляет собой индуктивный предел множеств $Mor\mathcal{T}^k$ при отображениях $F_k^{Mor} : Mor\mathcal{T}^k \to Mor\mathcal{T}^{k+1}$, где F_k^{Ob} и F_k^{Mor} — отображения на объектах и морфизмах функтора F_k.

Так как аксиоматика алгебраических топосов с категорией имен задается хорновскими формулами, то нетрудно видеть, что $\mathcal{T}^\infty$ также является алгебраическим топосом с категорией имен, а G_k — гомоморфизмы алгебраических топосов с категорией имен.

По определению индуктивного предела $\mathcal{T}^\infty$ множества объектов NOb и $NMor$ категории $\mathcal{T}^\infty$ являются индуктивными пределами множеств элементов объектов NOb и $NMor$ топоса $\mathcal{T}^k$ относительно отображений, задаваемых функторами F_k. Множества элементов объектов NOb и $NMor$

топоса $\mathcal{T}^k$ содержат, по построению, подмножества, изоморфные $Ob\mathcal{T}^{k-1}$ и $Mor\mathcal{T}^{k-1}$, которые отображаются функтором F_k в элементы объектов NOb и $NMor$ топоса $\mathcal{T}^{k+1}$ в соответствии с функтором F_{k-1}. Таким образом, предел этих подмножеств выделяет в множестве элементов объектов Nob и $NMor$ топоса $\mathcal{T}^\infty$ подкатегорию, изоморфную категории $\mathcal{T}^\infty$. Назовем этот изоморфизм категорий функтором $Name$. Он сопоставляет каждому объекту и морфизму категории $\mathcal{T}^\infty$ элементы объектов NOb и $NMor$ той же категории.

Для построения операции $Denote$ в топосе $\mathcal{T}^\infty$ рассмотрим алгебраический подтопос Set^∞ топоса Set, порожденный множествами $Ob\mathcal{T}^\infty$, $Mor\mathcal{T}^\infty$ и отображениями между ними, задающими категорную структуру $\mathcal{T}^\infty$. Категория Set^∞ представляет собой алгебраический топос с категорией имен, у которого NOb и $NMor$ — это множества $Ob\mathcal{T}^\infty$, $Mor\mathcal{T}^\infty$, рассмотренные как объекты категории Set^∞.

Далее рассмотрим гомоморфизмы алгебраических топосов с категорией имен $L_i : \mathcal{T}^k \to Set^\infty$, которые на образующих (подкатегории $\mathcal{T}^{k-1}$ категории имен $\mathcal{T}^k$) задаются функторами $G_{k-1} : \mathcal{T}^{k-1} \to \mathcal{T}^\infty$.

Покажем коммутативность следующих диаграмм:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T}^k & \xrightarrow{Fk} & \mathcal{T}^{k+1} \\ || & & \downarrow L_{k+1} \\ \mathcal{T}^k & \xrightarrow{Lk} & Set^\infty \end{array}$$

Так как $\mathcal{T}^k$ задаюся образующими и соотношениями, то для доказательства коммутативности этих диаграмм достаточно их проверить на образующих топоса $\mathcal{T}^k$. По определению функторов F_k, L_k, и L_{k+1}, ограничения рассматриваемых диаграмм на образующие (подмножества категорий имен) представляются диаграммами:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T}^{k-1} & \xrightarrow{Fk-1} & \mathcal{T}^k \\ || & & \downarrow G_k \\ \mathcal{T}^k & \xrightarrow{G(k-1)} & \mathcal{T}^\infty \end{array}$$

которые коммутативны по определению индуктивного предела $\mathcal{T}^\infty$ и гомоморфизмов G_{k-1}, G_k.

Таким образом, имеем семейство гомоморфизмов $L_k : \mathcal{T}^k \to Set^\infty$, коммутирующих с гомоморфизмами $F_k : \mathcal{T}^k \to \mathcal{T}^{k+1}$. По определению индуктивного предела $\mathcal{T}^{\infty}$, такое семейство гомоморфизмов индуцирует единственный гомоморфизм алгебраических топосов с категорией имен $L : \mathcal{T}^{\infty} \to Set^{\infty}$ такой, что композиция гомоморфизмов L и G_k равна L_k, то есть $L_k = G_k \circ L$.

Определим, теперь, операцию $Denote$, действующую на множествах элементов областей NOb и $NMor$ категории $\mathcal{T}^{\infty}$ (то есть на категории имен) в множества объектов $Ob\mathcal{T}^{\infty}$ и морфизмов $Mor\mathcal{T}^{\infty}$, равной ограничению гомоморфизма $L : \mathcal{T}^{\infty} \to Set^{\infty}$ на категорию имен категории $\mathcal{T}^{\infty}$ в категорию имен топоса Set^{∞}, которая совпадает с категорией $\mathcal{T}^{\infty}$.

Для доказательства того, что $\mathcal{T}^{\infty}$ с определенными выше операциями $Name$ и $Denote$ является рефлексивным алгебраическим топосом, осталось показать выполнение равенств

$$Denote(Name(T)) = T \text{ и } Denote(Name(f)) = f,$$

для любых $T \in Ob\mathcal{T}^{\infty}$ и $f \in Mor\mathcal{T}^{\infty}$. Доказательства этих равенств непосредственно следуют из определений индуктивного предела $\mathcal{T}^{\infty}$ и определений операций $Name$ и $Denote$.

Непротиворечивость $\mathcal{T}^{\infty}$ следует из непротиворечивости подтопоса Set^{∞} непротиворечивого топоса Set и существования гомоморфизма $L : \mathcal{T}^{\infty} \to Set^{\infty}$, который элементы $true$ и $false$ переводит в неравные элементы $true$ и $false$ категории Set^{∞}. Это завершает доказательство теоремы 2.1.

3 Алгебры с условными операциями

В отличие от абстрактных типов данных, которые моделируются многоосновными алгебраическими системами, общие понятия и схемы баз данных моделируются категориями с категорными операциями и требуют привлечения алгебраических средств, в которых операции действуют при выполнении некоторых условий. Примером такой операции является операция композиции отображений: композиция двух отображений f_1 и f_2 определена, если только область значений f_1 совпадает с областью определения f_2, то есть выполняется равенство $codom(f_1) = dom(f_2)$. Многие другие категорные операции также являются условными. Более того, условные операции требуются и для представления понятий, возникающих в предметных областях.

Перейдем к формальным определениям.

Пусть D — некоторое конечное множество, которое мы будем называть словарем алгебры. Элементы множества D называются сигнатурными символами алгебры или терминами. Пусть X некоторое множество переменных. Как обычно, множество алгебраических выражений или термов $Term(D, X)$ со словарем D и множеством переменных X строится индуктивно по правилам:

если $t \in D$ или $t \in X$, то $t \in Term(D, X)$;

если $F \in D$ и $t_1, ..., t_n \in Term(D, X)$, то $F(t_1, ..., t_n) \in Term(D, X)$.

Уравнением называется выражение вида $L = R$, где L, R — пара термов из множества $Term(D, X)$.

Будем предполагать, что с каждым термином $F \in D$ связывается следующая система условий:

$F.cond.eq(x_1, ..., x_n)$ — система уравнений с переменными $x_1, ..., x_n$, задающая условия применения термина F;

$F(x_1, ..., x_n)$ — вид правильно построенного терма со словарным термином F при выполнении условий применения этого термина;

$F.res.eq(x_1, ..., x_n)$ — система результирующих уравнений, задающих связь термина F с другими терминами.

Заметим, что некоторые из этих систем уравнений могут быть тривиальными (пустыми).

Совместно приведенную выше систему условий в примерах будем записывать одним предложением в виде:

"Если $F.cond.eq(x_1, ..., x_n)$, то выражение $F(x_1, ..., x_n)$ правильно и $F.res.eq(x_1, ..., x_n)$".

Кроме того, будем предполагать, что задана система условных соотношений $E = \{e_1, ..., e_k\}$, где для каждого $e \in E$ заданы:

$e.cond.eq(x_1, ..., x_k)$ — система уравнений, задающая условия применения соотношения e;

$e.res.eq(x_1, ..., x_k)$ — система уравнений, определяющая результат соотношения e.

Условное соотношение e в примерах будем записывать в виде предложения:

"Если $e.cond.eq(x_1, ..., x_k)$,то $e.res.eq(x_1, ..., x_k)$".

О п р е д е л е н и е 3.1. Спецификация $S = (D, E)$ алгебраической системы с условными операциями включает в себя:

D — словарь условных операций, где для каждой операции $F \in D$ определены уравнения — условия применения этой операции, правильно построенный терм с этой операцией и система результирующих уравнений;

E — множество условных соотношений.

Пусть $S = (D, E)$ — спецификация некоторой алгебраической системы, и X — некоторое множество переменных. Определим,теперь, в множестве $Term(D, X)$ подмножество $CTerm(D, E, X) \subset Term(D, X)$, которое будем называть множеством правильно построенных выражений. Построим также отношение эквивалентности $eq_E \subset CTerm(D, E, X) \times CTerm(D, E, X)$ на множестве правильно построенных выражений. Множество правильно построенных выражений $CTerm(D, E, X)$ и отношение эквивалентности на нем eq_E строятся по следующим правилам:

1. если $x \in X$, то $x \in CTerm(D, E, X)$;

2. для любого $F \in D$, если $t_1, .., t_n \in CTerm(D, E, X)$ и для них выполняется условие применения F, то есть $F.cond.eq(t_1, ..., t_n) \subset eq_E$, то $F(t_1, ..., t_n) \in CTerm(D, E, X)$ и, если термы, входящие в $F.res.eq(t_1, ..., t_n)$ правильно построены, то пары термов — левая и правая части уравнений из системы уравнений $F.res.eq(t_1, ..., t_n)$, включаются в отношение eq_E;

3. отношение eq_E рефлексивно, симметрично и транзитивно, то есть, если $t \in CTerm(D, E, X)$, то $(t, t) \in eq_E$, если $(t_1, t_2) \in eq_E$, то $(t_2, t_1) \in eq_E$, если $(t_1, t_2) \in eq_E$ и $(t_2, t_3) \in eq_E$, то $(t_1, t_3) \in eq_E$;

4. для любого $F \in D$, если $F(t_1,...,t_n) \in CTerm(D,E,X)$ и пар термов $(t_1,t'_1),...,(t_n,t'_n) \in eq_E$, то $F(t'_1,...,t'_n) \in CTerm(D,E,X)$ и пара $(F(t_1,...,t_n),\ F(t'_1,...,t'_n)) \in eq_E$;

5. для каждого условного соотношения $e \in E$ и для каждого набора правильно построенных выражений $t_1,..,t_k \in CTerm(D,E,X)$, удовлетворяющих условию применения соотношения e, то есть условию $e.cond.eq(t_1,...,t_k) \subset eq_E$, если термы, входящие в $e.res.eq(t_1,...,t_n)$, правильно построены, то уравнения из системы уравнений $e.res.eq(t_1,...,t_n)$, включаются в отношение eq_E.

Если пара термов (t_1,t_2) принадлежит отношению eq_E, то это будет выражаться также формулой $t_1 \approx_E t_2$.

О п р е д е л е н и е 3.2. Пусть $S=(D,E)$ — некоторая спецификация. Алгеброй $A(D,E)$ с условными операциями, порожденной словарем терминов D, условиями применения операций $F.cond.eq$ и результирующими соотношениями $F.res.eq$, для $F \in D$, и множеством условных соотношений E называется фактор множество правильно построенных термов $CTerm(D,E,\emptyset)$ по отношению эквивалентности eq_E, построенных представленным выше правилам 1—5.

Будем предполагать, что словарь D алгебраической системы не содержит синонимов.

О п р е д е л е н и е 3.3. Алгебраическая система $A(D,E)$ называется непротиворечивой, если любые два словарных термина $F_1,F_2 \in D$ не эквивалентны относительно эквивалентности eq_E, то есть $F_1 \not\approx_E F_2$.

Рассмотрим несколько примеров спецификаций алгебраических систем с условными операциями.

В первом примере покажем, что инициальная модель абстрактного типа данных $\mathcal{A}=(Name,\Sigma,Eq)$ (см. определения II.1.4 и II.1.8) является примером алгебраической системы с условными операциями.

П р и м е р 3.1. Абстрактный тип данных.

Пусть $\mathcal{A}=(Name,\Sigma,Eq)$ — произвольный тип данных, где $\Sigma = \{s_1,...,s_n; f_1,...,f_k\}$ — сигнатура абстрактного типа данных.

В качестве словаря соответствующей алгебраической системы с условными операциями берется множество

$$D=\{true,\ \in,\ s_1,...,s_n,\ f_1,...,f_k\}.$$

Множество соотношений и уравнения этого примера будем выписывать отдельными группами, используя некоторые сокращенные формы записей, которые будут вводиться по мере необходимости. Переменные будут обозначаться словами, начинающимися заглавными буквами, или просто заглавными буквами.

Положим: $true$, $s_1, ..., s_n$ — безусловные правильные выражения;

Если $Y = s_i$, то $\in (X, Y)$ — правильное выражение, для $i = 1, ..., n$.

Сокращение: *выражение $X \in Y$ является сокращенным выражением уравнения $\in (X, Y) = true$.*

С использованием этого сокращения выпишем некоторые условные соотношения E этого примера.

Если f_j — функциональный символ типа $f_j : s_{i_1} \times ... \times s_{ir} \to s_{kj}$, то для него вписывается следующее выражение. Если $X_{i_1} \in s_{i_1}, ..., X_{ir} \in s_{ir}$, то выражение $f_j(X_{i_1}, ..., X_{ir})$ правильно, и $f_j(X_{i_1}, ..., X_{ir}) \in s_{kj}$

Кроме того, выписываются уравнения Eq, выражающие соотношения абстрактного типа данных $\mathcal{A}$.

Нетрудно видеть, что алгебраическая система с условными операциями, соответствующая спецификации примера 3.1, является инициальной алгеброй термов абстрактного типа данных $\mathcal{A}$ (см. доказательство теоремы II.1.2).

В главе 2 использовались категории, порожденные множеством образующих и соотношений, для представления понятий. В следующем примере дается спецификация такой категории в виде алгебры с условными операциями.

П р и м е р 3.2. Категория $Cat(s_1, ..., s_n, f_1, ..., f_k, Eq)$, заданная образующими объектами $s_1, ..., s_n$, морфизмами $f_1, ..., f_k$ и множеством соотношений Eq между ними.

Словарь терминов в этом примере имеет вид:

$$D = \{true, \in,\ ob, mor, dom, codom, com, id, s_1, ..., s_n,\ f_1, ..., f_k\}.$$

Множество соотношений и уравнения этого примера также будем выписывать отдельными группами, используя некоторые сокращенные формы записей, которые будут вводиться по мере необходимости. Переменные будут обозначаться, как и раньше, словами, начинающимися заглавными буквами, или просто заглавными буквами.

Положим:

$true, ob, mor, s_1, ..., s_n, f_1, ..., f_k$ — безусловные правильные выражения;

Если $Ob = ob$, то $\in (X, Ob)$ — правильное выражение.

Если $Mor = mor$, то $\in (X, Mor)$ — правильное выражение.

Сокращение: *выражение $X \in Y$ является сокращенным выражением уравнения $\in (X, Y) = true$.*

С использованием этого сокращения выпишем некоторые условные соотношения E этого примера.

$s_i \in ob$, для $i = 1, ..., n$; $f_j \in mor$, для $j = 1, ..., k$.

Если $F \in mor$, то выражение $dom(F)$ правильно и $dom(F) \in ob$.

Если $F \in mor$, то выражение $codom(F)$ правильно и $codom(F) \in ob$.

Сокращение: *выражение $F : X \to Y$ является сокращенным выражением системы уравнений $F \in mor$, $dom(F) = X$, $codom(F) = Y$.*

Если $X \in ob$, то выражение $id(X)$ правильно и $id(X) : X \to X$.

Если $F \in mor$, $G \in mor$, $codom(F) = dom(G)$, то выражение $com(F, G)$ правильно и $com(F, G) \in mor$, $dom(com(F, G)) = dom(F)$, $codom(com(F, G)) = codom(G)$.

Если $F : X \to Y$, то $com(id(X), F) = F$ $com(F, id(Y)) = F$.

Если $F_1 : X_1 \to X_2$, $F_2 : X_2 \to X_3$, $F_3 : X_3 \to X_4$, то $com(com(F_1, F_2), F_3)) = com(F_1, com(F_2, F_3))$.

Кроме того, выписываются уравнения, выражающие соотношения между морфизмами из множества соотношений Eq.

В этом примере введенные сокращения для систем уравнений позволяют дать определение понятия категории в виде алгебры с условными операциями и условными соотношениями в стандартной для теории категорий форме. Алгебра, заданная этим определением, является стандартной категорией, заданной образующими и соотношениями.

В приложениях для задач представления понятий требуются также категории, у которых на множестве объектов определен порядок, аналогичный порядку включения множеств. Объекты могут иметь элементы, и морфизмы обладают свойством наследования [56, 40]. Кроме того, хотелось бы, чтобы все правильно построенные термы были разбиты по типам. Средствами условных алгебраических систем эти условия выражаются в следующем примере.

П р и м е р 3.3. Категория упорядоченных типов $OrderCat$.

Используется определение $Cat(...)$ из примера 3.2. При этом, пополняется словарь терминов и множество условных соотношений.

Словарь терминов D пополняется элементами $boolean$, $false$, $\subset$, $injection$, $\emptyset$, $appl$.

В алгебре Cat выражение $\in (El, X)$ правильно, только если X совпадает с ob или mor. Так как мы хотим допустить существование элементов у объектов, то необходимо доопределить операцию $\in$ следующими правилами (напомним, что переменные обозначаются словами, начинающимися с прописной буквы, или, просто, прописными буквами)

Если $X \in ob$, то выражение $\in (El, X)$ правильно построено.

Сокращение: *выражение* $El \in X$ *является сокращенным выражением уравнения* $\in (El, X) = true$.

Положим также:

$boolean$, $false$ — правильно построенные безусловные выражения и $boolean \in ob$, $true \in boolean$, $false \in boolean$.

Если $X \in ob$, $Y \in ob$, то выражение $\subset (X, Y)$ правильно и $\subset (X, Y) \in boolean$.

Сокращение: *выражение* $X \subset Y$ *является сокращенным выражением уравнения* $\subset (X, Y) = true$.

Условные соотношения /* отношения включения */:

Если $X \in ob$, то $X \subset X$.

Если $X_1 \subset X_2$, $X_2 \subset X_3$, то $X_1 \subset X_3$.

Если $X_1 \subset X_2$, $X_2 \subset X_1$, то $X_1 = X_2$.

Если $X \subset Y$, то выражение $injection(X, Y)$ правильно и

$injection(X, Y) \in mor$,

$dom(injection(X, Y)) = X$,

$codom(injection(X, Y)) = Y$.

Если $F, G \in mor$; $X, Y \in ob$; $X \subset Y$; $codom(F) = X$, $codom(G) = X$; и $com(F, injection(X, Y)) = com(G, injection(X, Y))$, то $F = G$.

Если $X \subset Y$, $Y \subset Z$, то $com(injection(X, Y), injection(Y, Z)) = injection(X, Z)$.

Если $X \in ob$, то $injection(X, X) = id(X)$.

Условные соотношения:

/* модификация операции композиции морфизмов */

Если $F \in mor$, $G \in mor$, $codom(F) \subset dom(G)$, то выражение $com(F, G)$ правильно построено и

$com(F, G) \in mor$,

$dom(com(F, G)) = dom(F)$,

$codom(com(F, G)) = codom(G)$.

Если $F \in mor$, $G \in mor$, $codom(F) \subset dom(G)$, то

$com(com(F, injection(codom(F), dom(G)), G) = com(F, G)$.

Если $F, G, H \in mor$, $codom(F) \subset dom(G)$, $codom(G) \subset dom(H)$, то $com(com(F, G), H)) = com(F, com(G, H))$.

Условные соотношения /* отношения принадлежности */:

Если $X, Y \in ob$, $El \in X$, $X \subset Y$, то $El \in Y$.

Условные соотношения /* пустой области */:

Термин $\emptyset$ определяет нульарный безусловный терм и $\emptyset \in ob$, $\in (El, \emptyset) = false$.

Если $X \in ob$, то $\emptyset \subset X$.

Условные соотношения /* термина $appl$, означающего применение функционального терма к элементу области определения */:

Если $El \in X$, $F : X \to Y$, то выражение $appl(F, El)$ правильно и $appl(F, El) \in Y$.

Сокращение: *выражение $F(El)$ является сокращенным выражением терма $appl(F, El)$.*

Если $El \in X$, $X \subset Y$, то $injection(X, Y)(El) = El$.

Если $F \in mor$, $G \in mor$, $codom(F) \subset dom(G)$, $El \in dom(F)$, то $com(F, G)(El) = G((F(El))$.

В этом примере, в отличие от обычного математического понятия категории (пример 3.2), в объектах выделяются канонические подобъекты, допускается, чтобы объекты имели элементы и некоторые элементы были выразимы в спецификации. Важным для приложений обобщением является также расширение условия применения композиции морфизмов: композиция двух морфизмов определена не только тогда, когда область значений одного морфизма совпадает с областью определения другого, но и когда область значения является подобъектом области определения. Кроме того, элемент подобъекта является элементом самого объекта, поэтому морфизмы, определенные на объекте, могут быть применены и к элементам любого его подобъекта. Таким образом, алгебраическая система этого примера позволяет моделировать и использовать механизм наследования свойств подтипом у надтипа.

Для моделирования более конкретных понятий можно использовать спецификацию предыдущего примера, дополнив ее новыми элементами и соотношениями конкретного понятия.

Для моделирования топосных операций над объектами к спецификации предыдущего примера в словарь следует добавить имена соответствующих операций и соответствующие им соотношения. Для моделирования рефлексии, которая для топосов была рассмотрена в предыдущем разделе, к спецификации примера также нужно добавить соответствующие термины и соотношения.

В задачах представления понятий алгебраическими системами с условными операциями многие вопросы к представленному понятию сводятся к следующей алгебраической задаче. Пусть задана некоторая спецификация алгебраической системы $S = (D, E)$, представляющая некоторое понятие. Нужно уметь отвечать на два основных взаимосвязанных вопроса:

является ли предъявленный вам терм правильно построенным;

эквивалентны ли два тема t_1 и t_2 по отношению эквивалентности eq_E, порожденной соотношениями E.

Так как примерами алгебраических систем $A(D, E)$ являются группы и полугруппы, порожденные множеством образующих и соотношений, и известны примеры групп и полугрупп с алгоритмически неразрешимой проблемой тождества слов, то в общем случае подмножества
$CTerm(D, E, \emptyset) \subset Term(D, E, \emptyset)$ и
$eq_E \subset CTerm(D, E, \emptyset) \times CTerm(D, E, \emptyset)$
могут быть неразрешимыми (но всегда рекурсивно перечислимы). Поэтому в общем случае не существует алгоритма для получения ответов на поставленные выше вопросы и нужно найти практическое решение этих проблем. Таким решением может быть отражение в системе представления (наряду с определениями понятий — спецификациями алгебраических систем) уже известных нам равенств и известных для данного понятия алгоритмов получения новых равенств, вытекающих из спецификации и известных равенств. Набор таких равенств и алгоритмов будем называть аппроксимацией алгебраической системы. Более точно.

О п р е д е л е н и е 3.4. Аппроксимацией $Approx^a A$ алгебраической системы с условными операциями $A(D, E)$ называется следующий набор подмножеств:

$CTerm^a \subset Term(D, \emptyset)$, $NTerm^a \subset Term(D, \emptyset)$ — два алгоритмически разрешимых подмножества в множестве термов со словарем терминов D ;

$eq_E^a \subset Term(D,\emptyset) \times Term(D,\emptyset)$, $Neq_E^a \subset Term(D,\emptyset) \times Term(D,\emptyset)$ — два алгоритмически разрешимых подмножества в множестве всех пар термов со словарем D.

При этом должны выполняться следующие включения:

$$CTerm^a \subset CTerm(D,E,\emptyset), \quad eq_E^a \subset eq_E$$

и, в предположении непротиворечивости алгебраической системы $A(D,E)$, должны выполняться включения:

$$NTerm^a \subset (Term(D,\emptyset) \setminus CTerm(D,E,\emptyset)),$$

$$Neq_E^a \subset (Term(D,\emptyset) \times Term(D,\emptyset)) \setminus eq_E,$$

где символом $\setminus$ обозначена операция разности двух множеств.

О п р е д е л е н и е 3.5. Пусть построены две аппроксимации алгебраической системы с условными операциями. Аппроксимация $Approx^a = (CTerm^a, NTerm^a, eq_E^a, Neq_E^a)$ алгебраической системы $A(D,E)$ будем называть более точной, чем аппроксимация $Approx^b = (CTerm^b, NTerm^b, eq_E^b, Neq_E^b)$, если они не совпадают и множества аппроксимации $Approx^a$ содержат соответствующие множества аппроксимации $Approx^b$.

Если $Approx^a = (CTerm^a, NTerm^a, eq_E^a, Neq_E^a)$ — некоторая аппроксимация алгебраической системы $A(D,E)$ и t — некоторый терм, то по данной аппроксимации определяется, что терм правильно построен, если $t \in CTerm^a$, и неправильно построен, если $t \in NTerm^a$. В противном случае, правильность построения терма t в данной аппроксимации считается неизвестной. Аналогично, если заданы термы t_1 и t_2, то в данной аппроксимации эти термы считаются эквивалентными, если $(t_1,t_2) \in eq_E^a$, неэквивалентными, если $(t_1,t_2) \in Neq_E^a$, и эквивалентность неизвестна в противном случае.

Таким образом, для задач представления знаний, в базе понятий необходимо хранить как спецификацию алгебраической системы, представляющей некоторое понятие, так и аппроксимацию этой алгебраической системы. Кроме того, для задач представления знаний необходимо, чтобы по аппроксимации можно было бы получать некоторые ответы на следующие вопросы:

для каких значений переменных $x_1,...,x_n$ терм $t(x_1,...,x_n)$ правильно построен в текущей аппроксимации;

для каких значений переменных $x_1, ..., x_n$ терм $t(x_1, ..., x_n)$ в аппроксимации выполняется система уравнений

$$\begin{array}{ccc} L_1(x_1, \ldots, x_n) & = & R_1(x_1 \ldots, x_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ L_k(x_1, \ldots, x_n) & = & R_k(x_1 \ldots, x_n), \end{array}$$

где L_i и R_i — некоторые термы от переменных $x_1, ..., x_n$, для $i = 1, ..., k$.

На практике соответствующие множества аппроксимации алгебраической системы могут задаваться средствами баз данных и алгоритмами с указанием правил переписывания термов и ограничением числа переписывания или временем работы алгоритмов. В отличие от систем правил переписывания термов, которые возникают в теории абстрактных типов данных (см. главу 2), здесь должны использоваться системы условных правил переписывания [60, 71], соответствующие условным равенствам алгебраической системы.

Для построения алгоритмов аппроксимаций алгебраических систем с условными операциями полезны следующие утверждения.

Утверждение 3.1. Пусть $S = (D, E)$ — некоторая спецификация и t терм в словаре D. Если терм t правильно построен в спецификации S, то и любой его подтерм правильно построен.

Доказательство. Доказательство утверждения будем проводить методом математической индукции по шагам построения множеств $CTerm(D, E)$ и eq_E.

На первом шаге множества $CTerm(D, E)$ и eq_E, согласно построениям определения 3.2, пусты, и правильно построенный терм может быть построен либо по правилу 1, либо по правилу 2 определения 3.2 с пустым условием применения. И в том и в другом случае, построенный терм, очевидно, удовлетворяет утверждению 3.1.

Пусть уже построены некоторые термы множества $CTerm(D, E)$, и по предположению индукции они удовлетворяют утверждению 3.1.

Предположим, терм t построен на следующем шаге построения множества $CTerm(D, E)$. Тогда, по определению 3.2, терм t может быть построен по правилу 1, 2 или 4. Если терм t построен по правилу 1, то t — переменная, и утверждение 3.1 для него выполнено. Если терм t построен по правилу 2 или 4, то он правильно построен и имеет вид $t = F(t_1, ..., t_n)$, где $F \in D$ и $t_1, ..., t_n$ — некоторые правильно построенные термы, построенные на предыдущих шагах. Так как собственный подтерм терма

$t = F(t_1, ..., t_n)$ совпадает с одним из термов $t_1, ..., t_n$ или их подтермом, то по предположению индукции он правильно построен, и для терма t, в любом случае, утверждение 3.1 верно. Следовательно, исходя из принципа полной математической индукции, утверждение 3.1 верно для всех правильно построенных термов.

Пусть $s(x_1, ..., x_n)$ — произвольный терм, содержащий переменные $x_1, ..., x_n$ и $t_1, ..., t_n$ — набор термов. Через $s(t_1, ..., t_n)$ обозначается результат подстановки $x_1 \mapsto t_1, \dots, x_n \mapsto t_n$ в терм $s(x_1, ..., x_n)$.

Утверждение 3.2. Для любого терма $s(x_1, ..., x_n)$ и набора эквивалентных термов $t_1 \approx_E t'_1, \dots, t_n \approx_E t'_n$ относительно эквивалентности eq_E, из правильности терма $s(t_1, ..., t_n)$ следует правильность терма $s(t'_1, ..., t'_n)$ и эквивалентность $s(t_1, ..., t_n) \approx_E s(t'_1, ..., t'_n)$.

Доказательство. Доказательство будем проводить индукцией по глубине терма $s(x_1, ..., x_n)$. Если глубина этого терма ноль, то этот терм — переменная, и для него утверждение очевидно. Если этот терм имеет глубину один, то $s(x_1, ..., x_n) = F(x_1, ..., x_n)$, где $F \in D$, то утверждение 3.2 в этом случае совпадает с правилом 4 определения 3.2 построения отношения eq_E.

В соответствии с правилом математической индукции предположим, что утверждение 3.2 верно для всех термов глубины меньше или равной k. Предположим, теперь, что терм $s(x_1, ..., x_n)$ имеет глубину, равную $k + 1$. Тогда $s(x_1, ..., x_n)$ имеет вид $s(x_1, ..., x_n) = F(s_1(x_1, ..., x_n), ..., s_k(x_1, ..., x_n))$ для некоторого $F \in D$ и термов $s_1(x_1, ..., x_n), ..., s_k(x_1, ..., x_n)$ глубины меньше или равной k. Если $s(t_1, ..., t_n) = F(s_1(t_1, ..., t_n), ..., s_k(t_1, ..., t_n))$ — правильно построенный терм, то согласно утверждению 3.1 термы $s_1(t_1, ..., t_n), ..., s_k(t_1, ..., t_n)$ — также правильно построены. Отсюда, по предположению индукции, имеем эквивалентности
$s_i(t_1, ..., t_n) \approx_E s_i(t'_1, ..., t'_n)$, для $i = 1, ..., k$.
Тогда, правило 4 определения 3.2 дает нам эквивалентность
$F(s_1(t_1, ..., t_n), ..., s_k(t_1, ..., t_n)) \approx_E F(s_1(t'_1, ..., t'_n), ..., s_k(t'_1, ..., t'_n))$,
которая совпадает с требуемой эквивалентностью
$s(t_1, ..., t_n) \approx_E s(t'_1, ..., t'_n)$.
Отсюда, по индукции следует истинность утверждения 3.2.

Следствие 3.3. Для любых двух термов $s_1(x_1, ..., x_n)$, $s_2(x_1, ..., x_n)$ и набора эквивалентных термов $t_1 \approx_E t'_1, \dots, t_n \approx_E t'_n$ относительно эквивалентности eq_E из эквивалентности $s_1(t_1, ..., t_n) \approx_E s_2(t_1, ..., t_n)$ следует эквивалентность $s_1(t'_1, ..., t'_n) \approx_E s_2(t'_1, ..., t'_n)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как выполняется эквивалентность $s_1(t_1, ..., t_n) \approx_E s_2(t_1, ..., t_n)$, то термы $s_1(t_1, ..., t_n)$, $s_2(t_1, ..., t_n)$ правильно построены, и к ним может быть применено утверждение 3.2. Имеем $s_1(t_1, ..., t_n) \approx_E s_1(t'_1, ..., t'_n)$ и $s_2(t_1, ..., t_n) \approx_E s_2(t'_1, ..., t'_n)$. Отсюда, по правилу 3 определения 3.2 (симметричности и транзитивности отношения эквивалентности) получаем требуемую эквивалентность $s_1(t'_1, ..., t'_n) \approx_E s_2(t'_1, ..., t'_n)$.

У т в е р ж д е н и е 3.4. Если терм $F(t_1, ..., t_n) \in CTerm(D, E, X)$ правильно построен для спецификации $S = (D, E)$, где $F \in D$ — словарный термин, и $t_1, ..., t_n$ — некоторые термы, то конкретизированные уравнения условия применения термина $F.cond.eq(t_1, ..., t_n)$ принадлежат отношению эквивалентности eq_E.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство будем проводить индукцией по шагам построения множества правильно построенных термов $CTerm(D, E)$. На первом шаге правильно построенный терм может быть построен только по правилам 1 или 2 определения 3.2 с пустым условием применения. Для таких термов выполнение утверждения 3.4 очевидно. Предположим, теперь, что терм $F(t_1, ..., t_n)$ построен на некотором шаге и все правильно построенные термы, построенные на предыдущих шагах, удовлетворяют утверждению 3.4. В этом случае, терм $F(t_1, ..., t_n)$ либо построен по правилу 2 (и тогда для него утверждение 3.4, очевидно, верно), либо по правилу 3 из ранее построенного терма $F(t'_1, ..., t'_n)$ и эквивалентностей $t'_1 \approx_E t_1$,...,$t'_n \approx_E t_n$. В последнем случае, по предположению индукции равенства уравнений $F.cond.eq(t_1, ..., t_n)$ принадлежат отношению эквивалентности eq_E. Тогда, согласно утверждению следствия 3.3, равенства системы уравнений $F.cond.eq(t_1, ..., t_n)$ также принадлежат отношению эквивалентности eq_E. Следовательно, утверждение 3.4 выполняется для всех правильно построенных термов.

Доказанные утверждения позволяют ввести некоторые правила проверки правильности построения термов и эквивалентности термов. Например, пользуясь утверждениями 3.1–3.4, проверка правильности построения терма может состоять в последовательной проверке правильности построения подтермов по возрастанию их сложности и построении для них канонических эквивалентных им термов в данной аппроксимации. Если правильность подтермов проверена а сам терм не входит в текущую аппроксимацию, то можно проверить условия применения соответствующего термина, и при их выполнении расширить текущую аппроксимацию новым правильно построенным термом. Для проверки эквивалентности двух термов можно привести эти термы к каноническому виду в аппроксимации и сравнить результаты.

Спецификации алгебр приведенных примеров удовлетворяет еще одному важному для контроля правильности определения свойству: последовательность введения условных операций и условных соотношений в примерах такова, что правильность термов, использованных в уравнениях на каждом шаге, следует из части определения, приведенной на предыдущих шагах спецификации.

Кроме того, приведенные здесь примеры подтверждают отмеченную в главе 2 важность использования сокращений и модульности в организации спецификаций для задач представления знаний.

Литература

[1] Агафонов В. Н. *Спецификация программ: понятийные средства и их организация.* Новосибирск: Наука, Сиб.отд-ние, 1990.

[2] Агафонов В. Н. *Типы и абстракция данных в языках программирования.* В кн. Данные в языках программирования. М.:Мир,1982, с.263–327.

[3] Бениаминов Е. М. *Алгебраический подход к моделям баз данных реляционного типа.* В кн.:Семиотика и информатика, 1980, вып.14, с.44-80.

[4] Бениаминов Е. М. *Алгебраическая стуктура реляционных моделей баз данных.* НТИ, сер.2, 1980, N9, с. 23-25.

[5] Бениаминов Е. М., Березина Н. А. *Об алгебраическом подходе к описанию схем баз данных.*// В сб. Вопросы создания Автоматизированной системы НТИ по документам ГАФ СССР, Москва: ГАУ при Совете Министров СССР, ВНИИДАД, 1981, с.69-77.

[6] Бениаминов Е. М. *О роли симметрии в реляционных моделях баз данных и логических структурах.* НТИ, сер.2, 1984, N5, с.17-25.

[7] Бениаминов Е. М., Березина Н. А., Дунская М. В. *Разработка методов моделирования автоматизированной обработки, поиска и размещения данных в больших информационных системах.* СИФ ОЦНТИ, ВНИИДАД, депонированная рукопись, инв. N031–85,М.,1985.

[8] Бениаминов Е. М. *О некотором подходе к представлению знаний.* Тезисы докладов 4 Всесоюзн.конференции "Применение методов мат. логики" г. Таллин, 1986, с.34-36.

[9] Бениаминов Е. М. *Основания категорного подхода к представлению знаний. Категорные средства.* Изв. АН СССР Техн. кибернет.,N 2, 1988 , с.21–33.

[10] Бениаминов Е. М. *Рефлексивные топосы в категорном подходе к представлению знаний.* Тезисы докладов Всесоюзн. школы-семинара

"Семиотические аспекты формализации интеллектуальной деятельности" г. Боржоми, 1988, с.111-113.

[11] Бениаминов Е.М., Вайнтроб А. Ю. *Основные принципы диалогового языка для представления знаний средствами категорного подхода.* Материалы конференции ДИАЛОГ-87, г. Тбилиси, 1988, с.174-177.

[12] Бениаминов Е. М. *Алгебраические системы и типы данных.* //В кн.:Системное и теоретическое программирование, Ростов-н-Д: РГУ, 1988, с.83-92.

[13] Бениаминов Е. М. *Система представления и обработки понятий, основанная на алгебраическом (категорном) подходе.* Труды II Всесоюзной конференции "Искусственный интеллект- 90", Минск, т.2, 1990, с.8-11.

[14] Вигнер П. *Программирование на языке АДА.* М.:Мир, 1983.

[15] Глушков В. М., Цейтлин Г. Е., Ющенко Е. Л. *Алгебра, логика, языки, программирование.* Киев:Наукова думка, 1974.

[16] Голдблатт Р. *Топосы. Категорный анализ логики.* М.:Мир, 1983.

[17] Гончаров С. С., Ершов Ю. Л., Свириденко Д. И. *Семантические основы логического программирования*// В сб. Концептуализация и смысл, под ред. Полякова И. В., Новосибирск:Наука, 1990, с.6-20.

[18] Джонстон П. Т. *Теория топосов.* М.:Наука, 1986.

[19] Жожикашвили А.В., Стефанюк В.Л. *Теория категорий в задачах представления знаний и обучения.* Изв. АН СССР. Техн. кибернет., N 2, 1986.

[20] Замулин А. В. *Системы программирования баз данных и знаний.* Новосибирск:Наука, 1990.

[21] Калиниченко Л. А. *Методы и средства интеграции неоднородных баз данных.* М.:Наука, 1983.

[22] Калиниченко Л. А., Рывкин В. М. *Машины баз данных и знаний.* М.:Наука, 1990.

[23] Капитонова Ю. В., Летичевский А. А. *Математическая теория проектирования вычислительных систем.* М.:Наука, 1988.

[24] Кондрашина Е. Ю., Литвинцева Л. В., Поспелов Д. А. *Представление знаний о времени и пространстве в интеллектуальных системах.* М.:Наука, 1989.

[25] Кучеров Г. А. *Системы подстановок термов.* Препринт 601, ВЦ АН СССР Сиб. отделение, Новосибирск, 1985.

[26] Мальцев А. И. *К общей теории алгебраических систем.* Мат. сборник, 1954, т.35, вып.1.

[27] Массер Д. *Спецификация абстрактных типов данных в системе AFFIRM.//* В сб.: Требования и спецификации в разработке программ, М.:Мир, 1984, с.199-222.

[28] Плоткин Б. И. *Универсальная алгебра, алгебраическая логика и базы данных.* М.:Наука, 1991.

[29] Поспелов Д. А. *Логико-лингвистические модели в системах управления.* М.:Энергоиздат, 1981.

[30] Свириденко Д. И. *Проект Сигма. Цели и задачи.* // В сб. Логические методы в программировании под ред. Ершова Ю. Л. (Вычислительные системы, вып. 133), РАН, Сиб. отд.-ние, Ин.-т математики, Новосибирск, 1990, с.68-94.

[31] Цаленко М. Ш. *Моделирование семантики в базах данных.* М.:Наука, 1989.

[32] Шенфилд Дж. *Математическая логика.* М.:Наука, 1975.

[33] Andréka H., Németi I. *Applications of universal algebra, model theory and categories in computer science (Part 1)* Comput. Lingust. Comput. Lang., 13, 1979, p. 152-282.

[34] Andréka H., Németi I. *Applications of universal algebra, model theory and categories in computer science (Part 2)* Comput. Lingust. Comput. Lang., 14, 1980, p. 43-65.

[35] Andréka H., Németi I. *Applications of universal algebra, model theory and categories in computer science (Part 3)* Lect. Notes in Comp. Sci., V.117, Springer-Verlag, Berlin, 1981, p. 281-290.

[36] Banchilhon F. *On the Compliteness of Query Language for Relational Data Bases.* Lect. Notes in Comp. Sci., V.64, Springer-Verlag, 1978, pp.76-98.

[37] Beniaminov E. M. *Concept Bases and Algebraic Modeling Methods.* Proceedings of the International Workshop on Advances in Databases and Information Systems (ADBIS'94), Moscow, 1994, p.133-135.

[38] Beniaminov E. M. *A Categorical Approach to Knowledge Representation.* Japan-CIS Symposium on Knowledge Based Software Engineering'94 (JCKBSE'94), Pereslavl-Zalesski, 1994, p.181-182.

[39] Beniaminov E. M. *Algebraic Invariants of Database Schemes.* Proceedings of the Second International Workshop on Advances in Databases and Information Systems (ADBIS'95), Moscow, V.1, 1995, p.259-263.

[40] Breu R. *Algebraic Specification Techniques in OOP Environments.* Lect. Notes in Comp. Sci., V.562, Springer-Verlag, 1991.

[41] Burstall R. M., Goguen J. A. *The Semantics of Clear, a Specification Language* In: Proceedings, of the 1979 Copenhagen Winter Shcool on Abstrakt Software Specification, Springer-Verlad, Berlin, 1980, 292-332.

[42] Chandra A. K., Harel D. *Computable queries for relational data bases.* J. Comput. & Syst. Sci., V.21, N2, 1980, p.156-172.

[43] Codd E. F. *A relational model for large shared data banks.* Comm. of ACM 13, 6, 1970, p.377-387.

[44] Dershowitz N. *Orderings for term-rewriting systems.* Theor. Comput. Sci., 1982, V.17, 3, pp.279-302.

[45] Elmasri R., Weeldrever J., Hevner A. *The category concept: an extension to the entity-relatconship model* Data & Knowledge Engineering, V.1, N1,1985.

[46] Ehrig H., Mahr B. *Fundamentals of Algebraic Specification.* V.1, Springer-Verlag, 1985.

[47] Ehrig H., Mahr B. *Fundamentals of Algebraic Specification.* V.2, Springer-Verlag, 1990.

[48] *First International Symposium on Category Theory Applied to Computation and Control* Lect. Notes in Com. Sci, V.25, Springer - Verlad, Berlin, 1975.

[49] Georgescu I. *A Categorial approach to knowledge-based systems.* Computers and Artifical Intelligence, V.3, N2, 1984, pp.105-113.

[50] Goguen J. A., Thatchar J. W., Wagner E. G. *An inititial algebra approach to the specification, correctness and implementation of abstract data types.* In Current Trends in Programming Methodology IV: Data Structuring, Prentice Hall, 1978, pp.80-144.

[51] Goguen J. A. *Some design principles and theory for OBJ-O, a language to express and execute algebraic specifications of problems.* In: Lect. Notes Comput. Sci.,V.75, 1979, pp.425-473.

[52] Goguen J. A., Burstall R. M. *Some fundamental algebraic tools for the semantics of computation.* Theoretical Computer Science, V.31, N2, 3, 1984.

[53] Goguen J. A., Burstall R. M. *Introducing Institution.* Lect. Not. Comp.Sci., V.164, 1984.

[54] Goguen J. A., Meseguer J. *Equality, types, modules, and (why not?) generics for logic programming.* Conf. of Logical Prog., Uppsala, Sweden, 1984, 179-210.

[55] Goguen J. A., Meseguer J. *Eqlog: Equality, types, and generic modules for logic programming.* In Douglas SeGroot and Gary Lindstrom, eds. "Logic Programming: Functions, Relations and Equations", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1986, pp.295-363.

[56] Goguen J. A., Meseguer J. *Order-sorted algebra solves the constructor selector, multiple representation and coercion problems.* Symposium on Logic in Comp. Sci., IEEE Comp. Society Press, 1987, pp.18-29.

[57] Goguen J. A., Burstall R. M. *Institutions: Abstract Model Theory for Specification and Programming.* Jorn. of ACM, V.39, 1, 1992, pp.95-146.

[58] Grothendieck A., Verdier J. L. *Théorie des Topos.* (SGA 4, exposés I-VI).–Second edition.–Berlin; Heidelberg; N. Y.:Springer, 1972.

[59] Huet G. *Confluent reductions: abstract properties and applications to term rewriting systems.* Journ. of ACM, 1980, v.27, N4, pp.797-821.

[60] Kaplan S. *Symplifying conditional term rewriting systems: unification, termination and confluence.* Jorn. Symbolic Computation 4(3), 1987, pp.295-334.

[61] Knuth D., Bendix P. *Simple word problems in universal algebras.* In: Conputational Problems in Abstract Algebra, Pergamon Press, Elmsford, New York, 1970, pp.263-297.

[62] Krasner M. I. *Generalization et analogues de la theorie de Galois.* Comptes Rendus de Congress de la Victorie de I'Ass. Franc. pour I'Avancem. Sci., 1945, pp. 54-58.

[63] Lawvere F. W. *Functorial semantics of algebraic theories.* Proc. Nat. Acad. Sci., 1963, V.50, N5, pp.869-872.

[64] Lawvere F. W. *Introduction* In: Toposes, Algebraic Geometry and Logic, Lect. Notes in Math., V.174, 1972.

[65] Maltsev A. *Algebraic Systems.* Springer-Verlag, 1973.

[66] Melton A., Schmidt D., and Strecher G. *Galois connections and computer science applications.* Lect. Notes in Comp. Sci., V. 240, Springer-Verlag, 1986.

[67] *Proceedings, Category Theory and Computer Programming,* Lect. Notes in Comp. Sci., V. 240, Springer-Verlag, 1986.

[68] *Proceedings, Category Theory and Computer Science,* Lect. Notes in Comp. Sci. V. 283, Springer-Verlag, 1987.

[69] Rydeheard D.F., Burstall R.M. *Computational category theory.* Prentice Hall, 1988.

[70] Tuijn C., Gyssens M., Paredaens J. *A Categorical Approach to Object-Oriented Data Modelling.* Proceedings of Third Workshop on Foundation of Models and Languages for Data and Objects, Aigen, 1991, pp.187–196.

[71] Rusinowitch M., Rémy J. L. (Eds.) *Conditional Term Rewriting Systems.* Lect. Notes in Comp. Sci., V. 656, Springer-Verlag, 1993.

[72] Zilles S.N. *Introduction to data algebras.* Lect. Notes Comput. Sci., V.86, Springer-Verlag, 1980.