International Geometry Center

PROCEEDINGS

of the

INTERNATIONAL GEOMETRY CENTER

Volume 2, No. 4, 2009

Odessa – 2009

Editor-in-Chief: Valentin Lychagin

Deputies of Editor-in-Chief:
Vladislav Goldberg
Joseph Krasilshchik
Vladimir Sharko

Managing Editors:
Alexei Kushner
Viktor Kuzakon

Executive Secretary: Nadezhda Konovenko

Editorial Board:

Dmitry Alekseevsky
Ian Anderson
Vladimir Balan
Valentin Diskant
Leonid Evtushik
Sergey Fedosov
Anatolii Fomenko
Valentin Fomenko
Nail Ibragimov
Dmitrii Gurevich
Izrail Kats
Vadim Kirichenko
Boris Kruglikov
Svyatoslav Leiko
Grigory Litvinov
Oleg Mashkov
Anatolii Milka
Petr Mormul
Alexander Prishlyak
Maido Rahula
Vladimir Roubtsov
Alexandra Sergeeva
Alexander Shelekhov
Vadim Shurygin
Eldar Straume
Galina Tolstikhina
Bronislav Yakubchik
Wassily Zadorozhnyi

Contents

Е. М. Бениаминов
Квантование как асимптотика некоторого
диффузионного процесса в фазовом пространстве 7

М. А. Марко, В. И. Паньженский
О группе автоморфизмов структуры Римана-Картана 51

Ю. С. Резникова
Срединно-усеченные симплексы в аффинных
пространствах произвольной размерности

О. П. Сурина
Естественная связность в обобщенном лагранжевом 69
пространстве со специальной метрикой

Н. А. Тяпин
Об инфинитезимальных автоморфизмах сасакиевых форм 75

Proc. Intern. Geom. Center 2009 **2**(4) 7–50 $d\omega$

Квантование как асимптотика некоторого диффузионного процесса в фазовом пространстве

Е. М. Бениаминов

Представлено Г. Л. Литвиновым

Аннотация Работа представляет собой расширенный вариант статьи [1], в которой основные результаты были анонсированы. Рассматривается некоторый классический диффузионный процесс для волновой функции на фазовом пространстве. Показывается, что за время порядка 10^{-11} c этот процесс сходится к процессу, который рассматривается квантовой механикой и описывается уравнением Шредингера. В представленной модели выражаются распределения вероятностей в фазовом пространстве, соответствующие волновым функциям квантовой механики. Оцениваются параметры предлагаемой модели, исходя из экспериментальных данных Лэмба-Резерфорда о сдвиге в спектре атома водорода и предположения о тепловой причине рассматриваемого диффузионного процесса.

В статье показано, что квантово-механическое описание процессов может возникнуть, как приближенное описание более точных моделей. Для рассматриваемой в работе модели это приближение появляется, когда функция Гамильтона мало меняется при изменении координат, импульсов и во времени на интервалах, длина которых имеет порядок, определяемый постоянной Планка и интенсивностями диффузий.

УДК 517.958: 530.145

1 Введение

В статье предлагается модель, с помощью которой, с одной стороны, можно оценить распределение вероятностей квантовой частицы в фазовом пространстве, находящейся в низкотемпературном тепловом поле. Впервые эта задача решалась Вигнером [3], но он построил "квазираспределения" на фазовом пространстве, которые могут быть отрицательными и, следовательно, лишенными физического смысла. С другой стороны, предлагаемая модель приводит к еще одной конструкции квантования механических систем и может быть использована в новом подходе к обоснованию классической процедуры квантования. Это старая проблема. Различные подходы к этой проблеме, в том числе вероятностные, можно найти в [4,5,6,7,8,9]. Эти работы оказали существенное влияние на автора при построении предлагаемой модели.

В работе рассматривается классическая модель диффузионного процесса для волновой (комплекснозначной) функции на фазовом пространстве. Анализ дифференциального уравнения модели показывает, что движение в модели раскладывается на быстрое и медленное. В результате быстрого движения система, начиная с произвольной волновой функции на фазовом пространстве, переходит к функции, принадлежащей некоторому особому подпространству. Элементы этого подпространства параметризуются волновыми функциями, зависящими только от координат. Медленное движение по подпространству описывается уравнением Шредингера.

Исходя из предположений о тепловой причине диффузий и соответствии следствий модели известным физическим экспериментам Лэмба-Резерфорда [10] (сдвиг Лэмба в спектре атома водорода), в работе делается оценка коэффициентов диффузий и времени переходного процесса от классического описания процесса, в котором принцип неопределенности Гейзенберга может не выполняться, к квантовому, в котором принцип Гейзенберга уже выполняется. Время переходного процесса имеет порядок $1/T \cdot 10^{-11}$, где T — температура среды.

Результаты этой работы были анонсированы в статье [1]. Доказательства теорем 4 и 5 поучительны, но довольно техничны, поэтому вынесены в Приложение. Оценка параметров модели также вынесена в Приложение.

Автор благодарен профессору Г.Л. Литвинову, который был внимателен к данной работе, сделал много редакторских замечаний и стимулировал существенную переработку текста.

2 Описание и некоторые свойства модели

Рассматривается некоторая математическая модель процесса, состояние которого в каждый момент времени задается волновой функцией – комплекснозначной функцией $\varphi(x,p)$, где $(x,p) \in R^{2n}$, и n — размерность конфигурационного пространства. В отличие от квантовой механики, где волновая функция зависит только от координат или только от импульсов, в нашем случае волновая функция зависит и от координат, и от импульсов. Так же, как в квантовой механике, предполагается, что для волновых функций выполняется принцип суперпозиции, и плотность вероятности $\rho(x,p)$ на фазовом пространстве, соответствующая волновой функции $\varphi(x,p)$, задается стандартной формулой

$$\rho(x,p) = \varphi^*(x,p)\varphi(x,p) = |\varphi(x,p)|^2. \tag{1}$$

В работе рассматривается классическая модель диффузионного процесса для волновой функции $\varphi(x,p)$ на фазовом пространстве. Предполагается, что каждый комплексный вектор волновой функции одновременно находится в 4-х движениях:

точка приложения комплексного вектора движется по классической траектории, заданной функцией Гамильтона $H(x,p)$;

точка приложения вектора перемещается случайно по координатам и импульсам, находясь в диффузионном процессе с постоянными коэффициентами диффузий a^2 и b^2 по координатам и импульсам, соответственно;

точка приложения каждого вектора движется по случайной траектории в результате движений, описанных в двух предыдущих пунктах, а сам вектор вращается с очень большой постоянной угловой скоростью $\omega = mc^2/\hbar$ в системе координат, связанной с этой точкой, где m – масса частицы, c – скорость света, $\hbar$ – постоянная Планка;

длина всех комплексных векторов волновой функции в момент времени t умножается на $\exp(abnt/\hbar)$ (это чисто техническое требование, которое не сказывается на относительных вероятностях нахождения частицы в фазовом пространстве).

Предполагается, что волновой вектор $\varphi(x,p,t)$ в точке (x,p) в момент времени t по принципу суперпозиции равен сумме волновых векторов, заданных распределением векторов $\varphi(x,p,0)$ в начальный момент времени и попавших в результате описанных выше движений в точку (x,p) в момент времени t.

3 Основные результаты

3.1 Математическая модель процесса

Рассмотрим диффузионный процесс на фазовом пространстве, в котором волновая функция $\varphi(x,p,t)$ в момент времени t удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial x_k}\frac{\partial\varphi}{\partial p_k}-\frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\right)-\frac{i}{\hbar}\left(H-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial p_k}p_k\right)\varphi+\Delta_{a,b}\varphi, \qquad (2)$$

где

$$\Delta_{a,b}\varphi=a^2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}-\frac{ip_k}{\hbar}\right)^2\varphi+b^2\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial p_k^2}\varphi+\frac{abn}{\hbar}\varphi, \qquad (3)$$

$H(x,p)$ — функция Гамильтона; a^2 и b^2 — коэффициенты диффузий по координатам и импульсам, соответственно.

Если в уравнении (2) отбросить последнее слагаемое, то получим дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка $\partial\varphi/\partial t=A\varphi$, где

$$A\varphi=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial x_k}\frac{\partial\varphi}{\partial p_k}-\frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\right)-\frac{i}{\hbar}\left(H-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial p_k}p_k\right)\varphi. \qquad (4)$$

Эта часть уравнения (2) описывает детерминированную составляющую движения комплексных векторов $\varphi(x,p,t)$ по характеристикам уравнения. Согласно уравнению, в этом движении точка приложения каждого вектора движется по классической траектории, заданной гамильтонианом $H(x,p)$, а сам вектор при этом вращается в каждой точке траектории с угловой скоростью $\omega'=\frac{1}{\hbar}\left(H-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial p_k}p_k\right)$.

Заметим, что в случае, когда конфигурационное пространство трехмерно и $H=E=c\sqrt{m^2c^2+p^2}$, то

$$\omega' dt=\frac{1}{\hbar}\left(H-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial p_k}p_k\right)dt=\frac{mc^2}{\hbar}\frac{mc^2dt}{H}=\frac{mc^2}{\hbar}d\tau,$$

где $\tau=mc^2dt/H$, в соответствии с формулами специальной теории относительности — собственное время в системе координат, связанной с частицей, движущейся с импульсом p. То есть в этом случае, вектор, точка приложения которого движется по классической траектории, вращается с постоянной угловой скоростью $\omega=mc^2/\hbar$ в системе координат, связанной с этой точкой.

Наоборот, если в правой части уравнения (2) оставить только последнее слагаемое вида (3), то получим уравнение

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = a^2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x_k} - \frac{ip_k}{\hbar}\right)^2\varphi + b^2\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial p_k^2}\varphi + \frac{abn}{\hbar}\varphi. \tag{5}$$

Это уравнение описывает диффузионную составляющую движения векторов $\varphi(x,p,t)$ на фазовом пространстве. В этом движении точки приложения векторов перемещаются в соответствии с классическим однородным диффузионным процессом с коэффициентами диффузий по координатам и импульсам, равными a^2 и b^2, соответственно. При этом сам вектор при малых случайных перемещениях из точки (x,p) в точку $(x+dx, p+dp)$ переносится параллельно, а его длина в момент времени t умножается на $\exp(abnt/\hbar)$. Заметим, что параллельный перенос векторов на фазовом пространстве задается связностью, которая выражается формулой: $L_{(dx,dp)}\varphi(x,p) - \varphi(x,p) \approx -(i/\hbar)\varphi(x,p)pdx$, где $L_{(dx,dp)}\varphi(x,p)$ — параллельный перенос вектора $\varphi(x,p)$ из точки (x,p) по бесконечно малому вектору (dx,dp).

В частном случае, когда конфигурационное пространство трехмерно, такая связность на фазовом пространстве вызвана синхронизацией движущихся часов в точках фазового пространства. Действительно, если частица с координатами $x = (x_1; x_2; x_3)$ движется со скоростью $v = (v_1; v_2; v_3)$, то в соответствии с формулами специальной теории относительности собственное время выражается через время наблюдателя t по формуле:

$$\tau = \frac{t - xv/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \tag{6}$$

где $xv = x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3$ — скалярное произведение векторов x и v; c — скорость света.

Для свободной частицы с импульсом $p = (p_1; p_2; p_3)$ и массой покоя m, энергия $E = c\sqrt{p^2 + m^2c^2}$ и, соответственно,

$$v = \frac{pc}{\sqrt{p^2 + m^2c^2}}, \qquad \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{mc}{\sqrt{p^2 + m^2c^2}}. \tag{7}$$

Подставив эти выражения в (6), после преобразований получим:

$$\tau = \frac{Et - xp}{mc^2}. \tag{8}$$

Рассмотрим распределение на фазовом пространстве комплексных векторов $\varphi(x,p,t)$, вращающихся с постоянной угловой скоростью $\omega =$

$mc^2/\hbar$ в собственном времени τ, которые в момент $\tau = 0$ равны одному и тому же вектору φ_0. Имеем:

$$\varphi(x,p,t) = \varphi_0 \exp\left(-i\frac{mc^2}{\hbar}\tau\right). \tag{9}$$

Подставив в это выражение формулу (8), получим

$$\varphi(x,p,t) = \varphi_0 \exp\left(\frac{-i(Et - xp)}{\hbar}\right). \tag{10}$$

Отсюда, если $L_{(\triangle x,0)}\varphi(x,p,t)$ сдвиг вектора $\varphi(x,p,t) = \varphi_0 \exp(-imc^2\tau/\hbar)$ на вектор $\triangle x$ по координатам x без изменения собственного времени, то

$$L_{(\triangle x,0)}\varphi(x,p,t) = \varphi(x,p,t) \exp\left(\frac{-i\triangle xp}{\hbar}\right). \tag{11}$$

В пределе при бесконечно малом $\triangle x$ получим требуемую формулу для этого случая: $L_{(dx,0)}\varphi(x,p) - \varphi(x,p) = -(i/\hbar)\varphi(x,p)pdx$, где dx — бесконечно малый сдвиг по координатам x.

С другой стороны, если происходит сдвиг $L_{(0,\triangle p)}$ вектора $\varphi(x,p,t) = \varphi_0 \exp(-imc^2\tau/\hbar)$ по импульсу на $\triangle p$ без изменения собственного времени, то, так как в приближении специальной теории относительности ускорение не меняет собственного времени частицы, имеем равенство $L_{(0,\triangle p)}\varphi(x,p,t) = \varphi(x,p,t)$ и $L_{(0,dp)}\varphi(x,p) - \varphi(x,p) = 0$.

Отсюда, в силу линейности $L_{(dx,dp)}$ по (dx,dp), получим требуемое равенство в общем случае: $L_{(dx,dp)}\varphi(x,p) - \varphi(x,p) = -(i/\hbar)\varphi(x,p)pdx$.

Заметим, что в этих предположениях дифференцированию по вектору бесконечно малого сдвига по k-ой координате соответствует дифференциальный оператор $D_{x_k} = \partial/\partial x_k - ip_k/\hbar$, а дифференцированию по сдвигу по k-ому импульсу обычный дифференциальный оператор $D_{p_k} = \partial/\partial p_k$, где $k = 1,\ldots,n$.

Заметим также, что эти операторы сдвига по координатам и импульсам не коммутируют. Коммутаторы их дифференциальных операторов имеют вид:

$$\left[D_{p_k}, D_{x_k}\right] = -i/\hbar \text{ и } \left[D_{p_k}, D_{x_j}\right] = 0, \text{ где } k \neq j \text{ и } k,j = 1,\ldots,n.$$

Таким образом, сдвиги по импульсам и координатам волновых функций на фазовом пространстве реализуют представление группы Гейзенберга.

3.2 Анализ диффузионной составляющей уравнения

Рассмотрим более подробно диффузионное уравнение (5). Это уравнение представляется в виде:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \Delta_{a,b}\varphi = a^2\Delta_x\varphi + b^2\Delta_p\varphi + \frac{nab}{\hbar}\varphi, \tag{12}$$

где

$$\Delta_x\varphi = \sum_{k=1}^{n} D^2_{x_k}\varphi = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_k^2} - \frac{2ip_k}{\hbar}\frac{\partial\varphi}{\partial x_k} - \frac{p_k^2}{\hbar^2}\varphi\right),$$

$$\Delta_p\varphi = \sum_{k=1}^{n} D^2_{p_k}\varphi = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2\varphi}{\partial p_k^2}.$$

Оператор $\Delta_{a,b}$ естественно назвать оператором диффузии для представления группы Гейзенберга с интенсивностями диффузии a и b по координатам и импульсам, соответственно.

Решение уравнения (12) будем искать в виде:

$$\varphi(x,p,t) = \varphi^0(x,p,t)\ \exp\left(\frac{ixp}{\hbar}\right). \tag{13}$$

Подставив это выражение в уравнение (12), разделив обе части равенства на $\exp(ixp/\hbar)$ и перенеся слагаемое $(nab/\hbar)\varphi^0$ в левую часть, получим уравнение

$$\frac{\partial\varphi^0}{\partial t} - \frac{nab}{\hbar}\varphi^0 = \sum_{k=1}^{n}\left(a^2\frac{\partial^2\varphi^0}{\partial x_k^2} + b^2\left(\frac{\partial^2\varphi^0}{\partial p_k^2} + \frac{2ix_k}{\hbar}\frac{\partial\varphi^0}{\partial p_k} - \frac{x_k^2}{\hbar^2}\varphi^0\right)\right), \tag{14}$$

где $\varphi^0 = \varphi^0(x,p,t)$ — некоторая функция.

Для решения уравнения (14) разложим функцию $\varphi^0(x,p,t)$ в интеграл Фурье по p, то есть представим функцию $\varphi^0(x,p,t)$ в виде:

$$\varphi^0(x,p,t) = \mathcal{F}_\hbar\psi^0(x,y,t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{n/2}}\int_{R^n}\psi^0(x,y,t)\exp\left(-\frac{iyp}{\hbar}\right)dy, \tag{15}$$

где

$$\psi^0(x,y,t) = \mathcal{F}_\hbar^{-1}\varphi^0(x,p,t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{n/2}}\int_{R^n}\varphi^0(x,p,t)\exp\left(\frac{iyp}{\hbar}\right)dp. \tag{16}$$

Подставив это выражение для $\varphi^0(x,p,t)$ в уравнение (14), получим, что $\psi^0(x,y,t)$ удовлетворяет уравнению:

$$\frac{\partial\psi^0}{\partial t} - \frac{nab}{\hbar}\psi^0 = \sum_{k=1}^{n}\left(a^2\frac{\partial^2\psi^0}{\partial x_k^2} - \frac{b^2(x_k-y_k)^2}{\hbar^2}\psi^0\right) \tag{17}$$

Правая часть этого уравнения представляет собой самосопряженный оператор с дискретным спектром из отрицательных чисел.

В самом деле, уравнение на собственные значения для этого оператора имеет вид:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(a^2\frac{\partial^2\chi}{\partial x_k^2}-\frac{b^2(x_k-y_k)^2}{\hbar^2}\chi\right)=\lambda\cdot\chi, \tag{18}$$

где $\chi=\chi(x,y)$ — функция от x и y. Это уравнение представляет собой стационарное уравнение Шредингера для гармонического осциллятора, и оно хорошо изучено (см., например, [13], стр. 94).

В частности известно, что на множестве функций, стремящихся к нулю при x, стремящемся к бесконечности, уравнение (18) имеет дискретный спектр из отрицательных собственных чисел $\lambda_1>\lambda_2\geq\ldots$ Наибольшее собственное значение $\lambda_1=-nab/\hbar$ соответствует собственной функции $\chi_1(x,y)=(b/a\pi\hbar)^{n/4}\exp\left(-b(x-y)^2/2a\hbar\right)$. Следующие собственные значения меньше λ_1 на величину, превышающую или равную $ab/\hbar$.

Так как собственные функции $\chi_k(x,y)$ оператора (18) образуют полную систему функций в классе функций, стремящихся к нулю, при x, стремящемся к бесконечности, то произвольную функцию $\psi^0(x,y,t)$ из этого класса можно представить в виде ряда:

$$\psi^0(x,y,t)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k(y,t)\chi_k(x,y),$$

где

$$c_k(y,t)=\int_{R^n}\psi^0(x,y,t)\chi_k(x,y)dx \tag{19}$$

— коэффициенты разложения функции $\psi^0(x,y,t)$ по собственным функциям $\chi_k(x,y)$.

Подставив выражение функции $\psi^0(x,y,t)$ в виде этого ряда в уравнение (17), получим, что это уравнение в ортонормированном базисе собственных функций $\chi_k(x,y)$, $k=1,2,\ldots$, распадается в бесконечную систему уравнений:

$$\frac{\partial c_k(y,t)}{\partial t}=\left(\lambda_k+\frac{nab}{\hbar}\right)c_k(y,t)\qquad k=1,2,\ldots$$

где $\lambda_1+nab/\hbar=0$ и $\lambda_k+nab/\hbar\leq-ab/\hbar$ при $k>1$.

Отсюда, $c_1(y,t)=c_1(y,0)$, и $c_k(y,t)=c_k(y,0)\exp((\lambda_k+nab/\hbar)t)$ экспоненциально убывают по времени при $k>1$. Поэтому, слагаемое в ψ^0, соответствующее первому собственному значению, будет давать основной вклад в функцию ψ^0 через время порядка $(\hbar/ab)$.

Таким образом, мы получили, что решение уравнения (17) через время t порядка $\hbar/ab$ экспоненциально приближается к функции $\psi^0(x,y)$, где

$$\psi^0(x,y) = \lim_{t\to\infty} \psi^0(x,y,t) = c_1(y,0)\chi_1(x,y). \tag{20}$$

Соответственно, так как по определению $\varphi^0(x,p,t) = \mathcal{F}_\hbar\psi^0(x,y,t)$, и преобразование Фурье непрерывно, имеем

$$\varphi^0(x,p) \stackrel{def}{=} \mathcal{F}_\hbar\psi^0(x,y) = \lim_{t\to\infty} \mathcal{F}_\hbar\psi^0(x,y,t) = \mathcal{F}_\hbar(c_1(y,0)\chi_1(x,y)). \tag{21}$$

Так как другие собственные функции использоваться не будут, введем обозначение

$$\chi(x-y) \stackrel{def}{=} \chi_1(x,y) = (b/a\pi\hbar)^{n/4} \exp\left(-b(x-y)^2/2a\hbar\right). \tag{22}$$

Для сокращения записи введем также обозначение: $\psi(y) \stackrel{def}{=} c_1(y,0)$, где $c_1(y,0)$ выражается формулой (19) при $k=1$ и $t=0$. То есть

$$\psi(y) = \int_{R^n} \psi^0(x,y,0)\chi_1(x,y)dx = \int_{R^n} \psi^0(x,y,0)\chi(x-y)dx. \tag{23}$$

Так как по формуле (13) $\varphi(x,p,t) = \varphi^0(x,p,t)exp(ixp/\hbar)$, то по формулам (21), (22) и с использованием введенного обозначения $\psi(y) \stackrel{def}{=} c_1(y,0)$, а также равенства (23) и обозначения(16) получим следующую теорему.

Теорема 1 *Пусть $\varphi(x,p,0)$ — произвольная функция такая, что преобразование Фурье функции $\varphi(x,p,0)exp(-ixp/\hbar)$ по p стремится к нулю при $x\to\infty$. Тогда решение $\varphi(x,p,t)$ диффузионного уравнения (5) экспоненциально по времени (с показателем равным $-abt/\hbar$) стремится к стационарному решению вида:*

$$\varphi_0(x,p) = \lim_{t\to\infty} \varphi(x,p,t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{n/2}} \int\limits_{R^n} \psi(y)\chi(x-y)e^{-i(y-x)p/\hbar}dy, \tag{24}$$

где

$$\psi(y) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{n/2}} \int\limits_{R^{2n}} \varphi(x,p,0)e^{i(y-x)p/\hbar}\chi(x-y)dpdx, \tag{25}$$

и

$$\chi(x-y) = \left(\frac{b}{a\pi\hbar}\right)^{n/4} e^{-b(x-y)^2/(2a\hbar)}. \tag{26}$$

Заметим, что $\chi^2(x-y)$ представляет собой плотность вероятностей нормального распределения по x с математическим ожиданием y, и дисперсией $a\hbar/(2b)$. Если величина $a\hbar/(2b)$ мала, то функция $\chi^2(x-y)$ близка к дельта-функции от $x-y$.

Композиция выражений (25) и (24) строит проектор P_0 из пространства волновых функций, заданных на фазовом пространстве, на некоторое подпространство. Элементы этого подпространства параметризуются функциями вида $\psi(y)$, где $y \in R^n$, т. е. волновыми функциями на конфигурационном пространстве.

Теорема 2 *Оператор проекции P_0, заданный композицией выражений (25) и (24), имеет вид:*

$$P_0\varphi = \frac{1}{(2\pi\hbar)^n} \int\limits_{R^{2n}} \varphi(x',p') e^{-\frac{b(x'-x)^2}{4a\hbar}} e^{-\frac{a(p'-p)^2}{4b\hbar}} e^{\frac{i(x-x')(p+p')}{2\hbar}} dx'dp'. \qquad (27)$$

Оператор P_0 самосопряженный и перестановочен с оператором $\Delta_{a,b}$.

Доказательство этой теоремы получается подстановкой формул (25) и (26) в (24), алгебраическим преобразованием показателя экспоненты и вычислением интеграла по y. Интеграл по y представляет собой преобразование Фурье от экспоненты с показателем в виде квадратного трехчлена, аналитическое выражение которого известно. Автор проводил вычисления с использованием системы Mathematica [14], поддерживающей символьные математические вычисления. Перестановочность операторов P_0 и $\Delta_{a,b}$ следует из того, что ортогональный проектор P_0 выделяет подпространство собственных векторов самосопряженного оператора $\Delta_{a,b}$ с нулевым собственным значением.

Из формул (24) и (1) получается следующее утверждение.

Теорема 3 *Если $\psi(x)$ — волновая функция на конфигурационном пространстве и $\varphi(x,p)$ — соответствующая ей по формуле (24) волновая функция в фазовом пространстве, то плотность вероятностей в фазовом пространстве $\rho(x,p) = |\varphi(x,p)|^2$ выражается формулой:*

$$\rho(x,p) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^n} \left(\frac{b}{4a\pi\hbar}\right)^{n/2} \int\limits_{R^{2n}} \psi\left(x + \frac{x''-x'}{2}\right) \psi^*\left(x + \frac{x''+x'}{2}\right) \qquad (28)$$
$$\exp\left(-\frac{b(x'')^2}{4a\hbar}\right) \exp\left(-\frac{b(x')^2}{4a\hbar}\right) \exp\left(\frac{ix'p}{\hbar}\right) dx''dx'.$$

В отличие от квазираспределений

$$W(x,p)=\frac{1}{(2\pi\hbar)^n}\int\limits_{R^n}\psi\left(x-\frac{x'}{2}\right)\psi^*\left(x+\frac{x'}{2}\right)\exp\left(\frac{ix'p}{\hbar}\right)dx',$$

определенных Вигнером [3], плотность $\rho(x,p)$ в фазовом пространстве, заданная выражением (28), всегда неотрицательна. Её выражение отличается от выражения функции Вигнера экспонентами под интегралом, которые задают плотности распределений, близкие к дельта-функциям.

Для доказательства теоремы 3 нужно в формулу (1) подставить выражение (24). Получим

$$\rho(x,p)=\varphi\varphi^*=\frac{1}{(2\pi\hbar)^n}\int\limits_{R^{2n}}\psi(y)\psi^*(y')\chi(x-y)\chi(x-y')e^{-i(y-y')p/\hbar}dydy', \quad (29)$$

где $\chi(x-y)$ выражается соотношением (26). После подстановки (26) в (29), замены координат $y=x+(x''-x')/2$ и $y'=x+(x''+x')/2$ под интегралом и преобразования показателей экспонент получим формулу (28).

Алгебра наблюдаемых, заданных действительными функциями на фазовом пространстве, но усредняемых по плотностям распределений вероятностей вида (28), исследовалась в [15].

Функция плотности распределения вероятностей $\rho(x)$ в конфигурационном пространстве выражается через плотность $\rho(x,p)$ в фазовом пространстве по формуле $\rho(x)=\int_{R^n}\rho(x,p)dp$. Отсюда, интегрированием выражения (29) по p получаем следующее утверждение.

Следствие 1 *Если $\psi(x)$ — волновая функция на конфигурационном пространстве, то соответствующая ей плотность вероятностей $\rho(x)$ в конфигурационном пространстве задается формулой*

$$\rho(x)=\int_{R^n}|\psi(y)|^2\chi^2(x-y)dy, \quad (30)$$

где $\chi(x-y)$ выражается соотношением (26). То есть $\rho(x)$ получается из $|\psi(x)|^2$ сглаживанием (сверткой) по плотности нормального распределения с дисперсией $a\hbar/(2b)$, и точность определения координаты ограничивается величиной $\sim\sqrt{a\hbar/(2b)}$.

Как известно [16], в квантовой электродинамике минимальная погрешность измерения координат электрона в системе покоя оценивается величиной $\hbar/(mc)$, где m — масса электрона, а c — скорость света. Поэтому утверждение следствия 1, хотя и не соответствует нерелятивистской

квантовой механике, в которой предполагается, что координаты можно определить с любой точностью, но не противоречит более точной теории — квантовой электродинамике.

Если предполагать, что диффузия вызывается тепловыми воздействиями на электрон, то величины коэффициентов диффузий по координатам и импульсам выражаются в статистической физике (см., например [17], гл.7, §4 и §9) через температуру T по формулам: $a^2 = kT/(m\gamma)$ и $b^2 = \gamma kTm$, где k — постоянная Больцмана, m — масса электрона, γ — коэффициент трения среды на единицу массы. Отсюда, $a/b = (\gamma m)^{-1}$ и $ab = kT$. То есть, в этом случае, величина a/b, которая входит в выражение (26) и определяет дисперсию сглаживания в следствии 1, не зависит от температуры. С другой стороны, t — время переходного процесса, определенное в теореме 1, имет вид: $t \sim \hbar/(ab) = \hbar/(kT) = T^{-1} \cdot 7.638 \cdot 10^{-12}$. Более подробные выкладки для оценки величины $\hbar/(ab)$ приведены в Приложении 3.

3.3 Анализ модели процесса

Вернемся к исследованию основного уравнения (2). С учетом оценки, сделанной в конце предыдущего подраздела, будем считать в уравнении (2) величину $\hbar/(ab)$ малым параметром и предполагать, что координаты и импульсы мало меняются за это время при классическом движении, определенном гамильтонианом $H(x,p)$, и сама функция $H(x,p)$ и все ее производные растут на бесконечности не быстрее многочлена.

Теорема 4 *Движение, описываемое уравнением (2), асимптотически распадается при $\hbar/(ab) \to 0$ на быстрое движение и медленное.*

1) В результате быстрого движения произвольная волновая функция $\varphi(x,p,0)$ переходит за время порядка $\hbar/(ab)$ к функции вида (24):

$$\varphi(x,p) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{n/2}} \int\limits_{R^n} \psi(y)\chi(x-y)e^{-i(y-x)p/\hbar}dy, \tag{31}$$

где

$$\chi(x-y) = \left(\frac{b}{a\pi\hbar}\right)^{n/4} e^{-b(x-y)^2/(2a\hbar)}, \tag{32}$$

Волновые функции вида (31) образуют линейное подпространство. Элементы этого подпространства параметризуются волновыми функциями $\psi(y)$, зависящими только от координат $y \in R^n$.

2) Медленное движение, начинающееся с ненулевой волновой функции $\varphi(x,p,0)$ из этого подпространства вида (31) происходит

по подпространству и параметризуется волновой функцией $\psi(y,t)$*, зависящей от времени. Функция* $\psi(y,t)$ *удовлетворяет уравнению Шредингера вида* $i\hbar\partial\psi/\partial t = \hat{H}\psi$*, где*

$$\hat{H}\psi = \frac{1}{(2\pi\hbar)^n}\int\limits_{R^{3n}}\left(H(x,p) - \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial x_k} + \frac{ib}{a}\frac{\partial H}{\partial p_k}\right)(x_k - y'_k)\right)\times \tag{33}$$
$$\times\chi(x-y)\chi(x-y')e^{\frac{i}{\hbar}(y-y')p}\psi(y',t)dy'dxdp,$$

и $\chi(x-y)$ *задается формулой (32).*

Доказательство пункта 1 теоремы 4, ввиду его объема и техничности, вынесено в Приложение 1.

Доказательство пункта 2 теоремы 4. По первому пункту теоремы 4 утверждается, что в результате быстрого движения, начальное распределение $\varphi(x,p,0)$ приводится к виду, мало отличающемуся от (31). В результате медленного движения распределение остается в классе функций вида (31), но меняется во времени.

Для исследования медленного движения будем искать решение уравнения (2) в виде (31), в котором $\psi = \psi(y',t)$ рассматривается зависящей от времени.

Подставим выражение (31) в уравнение (2). Так как по построению это выражение для φ удовлетворяет уравнению $\Delta_{a,b}\varphi = 0$, то после подстановки выражения (31) в уравнение (2) и деления обеих частей уравнения на $\exp(ixp/\hbar)$ получим следующее уравнение:

$$\frac{1}{(2\pi\hbar)^{n/2}}\int\limits_{R^n}\frac{\partial\psi(y',t)}{\partial t}\chi(x-y')\exp\left(-\frac{iy'p}{\hbar}\right)dy' =$$
$$= \frac{1}{(2\pi\hbar)^{n/2}}\int\limits_{R^n}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial x_k}\left(-\frac{i(y'_k - x_k)}{\hbar}\right) - \frac{\partial H}{\partial p_k}\left(-\frac{b}{a\hbar}(x_k - y'_k) + \frac{i}{\hbar}p_k\right)\right) -\right.$$
$$\left. -\frac{i}{\hbar}\left(H - \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial p_k}p_k\right)\right]\psi(y',t)\chi(x-y')\exp\left(-\frac{iy'p}{\hbar}\right)dy'. \tag{34}$$

Если в полученном уравнении раскрыть скобки, привести подобные члены, умножить обе части уравнения на $1/(2\pi\hbar)^{n/2}\chi(x-y)\exp(iyp/\hbar)$ и проинтегрировать по p и по x, то с учетом равенства $\int_{R^n}\chi^2(x-y)dx = 1$ получим следующее уравнение:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar}\hat{H}\psi \quad \text{или} \quad i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{H}\psi, \tag{35}$$

где оператор $\hat{H}$ получается из функции H по формуле (33), требуемой в теореме 4 пункт 2).

Теорема 5 *Если* $\frac{a\hbar}{b}$ *— малая величина и* $H(x,p) = \frac{p^2}{2m} + V(x)$, *то оператор* $\hat{H}$ *с точностью до членов порядка* $a\hbar/b$ *имеет вид:*

$$\hat{H} \approx -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial y_k^2}\right) + V(y) - \frac{a\hbar}{4b}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 V}{\partial y_k^2} + \frac{3nb\hbar}{4ma}. \tag{36}$$

Доказательство теоремы 5 приведено в Приложении 2.

Первые два слагаемые в формуле (36) дают стандартный оператор Гамильтона. Последнее слагаемое — константа, и ею можно пренебречь. Предпоследнее слагаемое рассмотрим (ввиду малости $a\hbar/b$) как возмущение к оператору Гамильтона.

Считая, что отклонения в спектре атома водорода (сдвиг Лэмба), наблюдаемые в экспериментах Лэмба-Резерфода [10], вызываются предпоследним слагаемым в формуле (36), можно оценить величину a/b. Расчеты стандартным методом возмущений, аналогичные расчетам, выполненным в [18], дают следующую оценку: $a/b = 3.41 \cdot 10^4/$ (см. вычисления в Приложении 3). Отсюда, стандартное отклонение для нормального распределения χ^2, по которому производится сглаживание в формуле (30), имеет вид $\sqrt{a\hbar/(2b)} = 4.24 \cdot 10^{-12}$. Эта величина существенно меньше радиуса атома водорода и близка к комптоновской длине волны электрона $\hbar/(mc) = 3.86 \cdot 10^{-11}$.

4 Заключение

В статье показано, что стандартное квантово-механическое описание процесса может возникнуть, как приближенное описание некоторой классической модели диффузионного процесса для волновой функции в фазовом пространстве. Расчеты показывают, что предложенная модель в виде дифференциального уравнения (2) достаточно адекватно описывает физические процессы в стандартных случаях для стандартного гамильтониана. Но эту модель можно применить и для расчетов процессов с нестандартным гамильтонианом или с гамильтонианом, быстро меняющимся во времени, как при внезапных возмущениях [19] или для периодически меняющегося потенциала с частотой порядка $ab/\hbar$, и сравнить с экспериментальными данными.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Доказательство пункта 1 теоремы 4

Пусть $\varphi(x,p,t)$ — решение уравнения (2). В обозначениях (3) и (4) уравнение (2) принимает вид

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = A\varphi + \Delta_{a,b}\varphi, \tag{37}$$

где A – косоэрмитовый оператор, а $\Delta_{a,b}$ — самосопряженный оператор диффузии.

Рассмотрим производную по времени от $||\varphi||^2$ — квадрата нормы функции φ. Имеем,

$$\frac{d||\varphi||^2}{dt} = \frac{d\langle\varphi;\varphi\rangle}{dt} = \langle\frac{\partial\varphi}{\partial t};\varphi\rangle + \langle\varphi;\frac{\partial\varphi}{\partial t}\rangle = \langle A\varphi + \Delta_{a,b}\varphi;\varphi\rangle + \langle\varphi;A\varphi+\Delta_{a,b}\varphi\rangle.$$

Отсюда, в силу линейности скалярного произведения $\langle\ ;\ \rangle$ и равенств $\langle A\varphi;\varphi\rangle = -\langle\varphi;A\varphi\rangle$ и $\langle\Delta_{a,b}\varphi;\varphi\rangle = \langle\varphi;\Delta_{a,b}\varphi\rangle$, получим равенство:

$$2||\varphi||\frac{d||\varphi||}{dt} = \frac{d||\varphi||^2}{dt} = 2\langle\Delta_{a,b}\varphi;\varphi\rangle \quad \text{или} \quad \frac{d||\varphi||}{dt} = \frac{1}{||\varphi||}\langle\Delta_{a,b}\varphi;\varphi\rangle. \tag{38}$$

Обозначим через $\bar\varphi \stackrel{def}{=} \varphi/||\varphi||$ — нормированную функцию φ на ее норму. Если функция φ удовлетворяет уравнению (37), то с учетом формулы (38)

$$\frac{\partial\bar\varphi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varphi}{||\varphi||}\right) = \frac{1}{||\varphi||}\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{\varphi}{||\varphi||^2}\frac{d||\varphi||}{dt} = A\bar\varphi + \Delta_{a,b}\bar\varphi - \langle\Delta_{a,b}\bar\varphi;\bar\varphi\rangle\bar\varphi. \tag{39}$$

По определению функции $\bar\varphi$ ее норма $||\bar\varphi|| \equiv 1$, и уравнение (39) естественно назвать уравнением для нормированной волновой функции.

Рассмотрим, теперь, проекцию функции $\bar\varphi(x,p,t)$ на подпространство стационарных решений диффузионного уравнения (5).

Представим функцию $\bar\varphi(x,p,t)$ в виде $\bar\varphi = \varphi_0+\varphi_1$, где $\varphi_0 = P_0\bar\varphi$, $\varphi_1 = (\mathbf{1}-P_0)\bar\varphi = P_1\bar\varphi$ и P_0 — проектор теоремы 2. Из самосопряженности оператора проекции P_0 следуют равенства $\langle\varphi_0;\varphi_1\rangle = 0$ и $||\varphi_0||^2 + ||\varphi_1||^2 = ||\bar\varphi||^2 = 1$.

Для доказательства первой части теоремы 4 нужно показать, что величина $||\varphi_1||^2 = 1 - ||\varphi_0||^2$ становится малой через время порядка $\hbar/(ab)$.

Для сокращения записей введем обозначение:

$$\eta(t) \stackrel{def}{=} ||\varphi_0(t)||^2, \quad \text{где} \quad \varphi_0 = P_0\bar\varphi. \tag{40}$$

Утверждение 1 *Если φ удовлетворяет уравнению (37), то величина $\eta(t) = ||\varphi_0||^2$ удовлетворяет дифференциальному уравнению:*

$$\dot{\eta} = \alpha(t)\sqrt{1-\eta}\sqrt{\eta} + \beta(t)(1-\eta)\eta, \tag{41}$$

где $\beta(t) \geq \beta_{min} = 2ab/\hbar$ и $|\alpha(t)| \leq \alpha_{max} = 2 \cdot \max_{\bar{\varphi}_0} ||A\bar{\varphi}_0 - P_0 A\bar{\varphi}_0||$. Максимум в последнем выражении берется по всем нормированным функциям $\bar{\varphi}_0$ из подпространства стационарных решений диффузионного уравнения (5), для которых функция $|\bar{\varphi}_0(x,p)|^2$ задает распределение вероятностей в физической области фазового пространства для данного процесса.

Для доказательства утверждения 1 рассмотрим, как меняется во времени величина $||\varphi_0||^2$, где $\varphi_0 = P_0\bar{\varphi}$ и φ удовлетворяет уравнению (37).

Имеем следующие равенства, как следствие определения функции φ_0, независимости оператора P_0 от времени, равенства (39), линейности скалярного произведения $\langle\ ;\ \rangle$ по каждому аргументу, перестановочности P_0 с $\Delta_{a,b}$, самосопряженности операторов P_0 и $\Delta_{a,b}$, косоэрмитовости оператора A и свойства проективности $P_0 = P_0^2$:

$$\begin{aligned}
\dot{\eta} &= \frac{d\langle\varphi_0;\varphi_0\rangle}{dt} = \frac{d\langle P_0\bar{\varphi}; P_0\bar{\varphi}\rangle}{dt} = \langle P_0\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial t}; P_0\bar{\varphi}\rangle + \langle P_0\bar{\varphi}; P_0\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial t}\rangle = \\
&= \langle\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial t}; P_0^2\bar{\varphi}\rangle + \langle P_0^2\bar{\varphi}; \frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial t}\rangle = \langle\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial t}; \varphi_0\rangle + \langle\varphi_0; \frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial t}\rangle = \\
&= \left\langle A\bar{\varphi} + \Delta_{a,b}\bar{\varphi} - \langle\Delta_{a,b}\bar{\varphi};\bar{\varphi}\rangle\bar{\varphi};\ \varphi_0\right\rangle + \left\langle\varphi_0;\ A\bar{\varphi} + \Delta_{a,b}\bar{\varphi} - \langle\Delta_{a,b}\bar{\varphi};\bar{\varphi}\rangle\bar{\varphi}\right\rangle = \\
&\quad \text{(подставим выражение для } \bar{\varphi} = \varphi_0 + \varphi_1, \text{ воспользуемся} \\
&\quad \text{линейностью операторов и равенствами } A^* = -A,\ \Delta_{a,b}\varphi_0 = 0) \\
&= -\langle\varphi_1; A\varphi_0\rangle - \langle A\varphi_0;\varphi_1\rangle - 2\langle\Delta_{a,b}\varphi_1;\varphi_1\rangle\cdot\langle\varphi_0;\varphi_0\rangle = \\
&= -\left\langle\frac{\varphi_1}{||\varphi_1||}; A\frac{\varphi_0}{||\varphi_0||}\right\rangle\cdot||\varphi_1||\cdot||\varphi_0|| - \left\langle A\frac{\varphi_0}{||\varphi_0||}; \frac{\varphi_1}{||\varphi_1||}\right\rangle\cdot||\varphi_1||\cdot||\varphi_0|| - \\
&\quad -2\left\langle\Delta_{a,b}\frac{\varphi_1}{||\varphi_1||}; \frac{\varphi_1}{||\varphi_1||}\right\rangle\cdot||\varphi_1||^2\cdot||\varphi_0||^2 = \\
&= -\left(\langle\bar{\varphi}_1; A\bar{\varphi}_0\rangle + \langle A\bar{\varphi}_0;\bar{\varphi}_1\rangle\right)||\varphi_1||\ ||\varphi_0|| - 2\langle\Delta_{a,b}\bar{\varphi}_1;\bar{\varphi}_1\rangle||\varphi_1||^2||\varphi_0||^2,
\end{aligned} \tag{42}$$

где $\bar{\varphi}_1$ и $\bar{\varphi}_0$ — нормированные функции φ_1 и φ_0, соответственно.

Так как $\eta = ||\varphi_0||^2$ и $||\varphi_0||^2 + ||\varphi_1||^2 = ||\bar{\varphi}||^2 = 1$, то $||\varphi_1|| = \sqrt{1-\eta}$.

Подставив эти равенства в уравнение (42) и введя обозначения

$$\alpha(t) \stackrel{def}{=} -\left(\langle\bar{\varphi}_1; A\bar{\varphi}_0\rangle + \langle A\bar{\varphi}_0;\bar{\varphi}_1\rangle\right) \text{ и } \beta(t) \stackrel{def}{=} -2\langle\Delta_{a,b}\bar{\varphi}_1;\bar{\varphi}_1\rangle,$$

получим уравнение утверждения 1: $\dot{\eta} = \alpha(t)\sqrt{1-\eta}\sqrt{\eta} + \beta(t)(1-\eta)\eta$.

Для оценки $|\alpha(t)|$ заметим, что так как $\langle\bar{\varphi}_1; A\bar{\varphi}_0\rangle = \langle A\bar{\varphi}_0; \bar{\varphi}_1\rangle^*$, где в конце равенства звездочкой * обозначена операция комплексного сопряжения, то $\alpha(t) = 2 \cdot Re(\langle -A\bar{\varphi}_0; \bar{\varphi}_1\rangle)$, где Re — оператор выделения действительной части у комплексного числа. Отсюда получим следующие оценки:

$$|\alpha(t)| = 2|Re(\langle -A\bar{\varphi}_0; \bar{\varphi}_1\rangle)| \le 2|\langle A\bar{\varphi}_0; \bar{\varphi}_1\rangle| = 2|\langle A\bar{\varphi}_0 - P_0 A\bar{\varphi}_0; \bar{\varphi}_1\rangle| = 2|\langle (A - P_0 A)\bar{\varphi}_0; \bar{\varphi}_1\rangle| \le 2||(A - P_0 A)\bar{\varphi}_0||\ ||\bar{\varphi}_1|| = 2||A\bar{\varphi}_0 - P_0 A\bar{\varphi}_0||. \quad (43)$$

Последнее неравенство в предыдущей формуле получено по неравенству Коши-Буняковского для оценки модуля скалярного произведения. Функция $-P_0 A\bar{\varphi}_0$, ортогональная к функции φ_1, была добавлена к $A\bar{\varphi}_0$, чтобы получить проекцию функции $A\bar{\varphi}_0$ на подпространство, ортогональное к пространству стационарных решений диффузионного уравнения (5).

Оценим, теперь, величину $\beta(t) = -2\langle \Delta_{a,b}\bar{\varphi}_1; \bar{\varphi}_1\rangle$. Для этого разложим функцию $\bar{\varphi}_1$ по ортонормированным собственным функциям χ_i самосопряженного оператора $\Delta_{a,b}$. Имеем, $\bar{\varphi}_1 = \sum_{i=0}^{\infty} c_i\chi_i$. Так как вектор $\bar{\varphi}_1$ перпендикулярен векторам с собственным значением, равным 0, то $\Delta_{a,b}\bar{\varphi}_1 = \sum_{i:\ \lambda_i \neq 0} \lambda_i c_i \chi_i$ и $\sum_{i:\ \lambda_i \neq 0} c_i^2 = 1$. Отсюда,

$$\langle \Delta_{a,b}\bar{\varphi}_1; \bar{\varphi}_1\rangle = \langle \sum_{i:\ \lambda_i \neq 0} \lambda_i c_i \chi_i; \sum_{i=1}^{\infty} c_i \chi_i\rangle = \sum_{i:\ \lambda_i \neq 0} \lambda_i c_i^2 \le \sum_{i:\ \lambda_i \neq 0} \lambda_{max} c_i^2 = \lambda_{max} \quad (44)$$

где λ_{max} — максимальное ненулевое собственное значение самосопряженного оператора $\Delta_{a,b}$.

Используя это неравенство, а также зная, что $\lambda_{max} = -ab/\hbar$ (см. доказательство теоремы 2), получим требуемую в утверждении 1 оценку:

$$\beta(t) = -2\langle \Delta_{a,b}\bar{\varphi}_1; \bar{\varphi}_1\rangle \ge \beta_{min} = -2\lambda_{max} = \frac{2ab}{\hbar}.$$

Утверждение 1 доказано.

Утверждение 2 *При $\hbar \to 0$ оценка величины α_{max} имеет вид: $\alpha_{max} = (C + o_\hbar(1))/\sqrt{\hbar}$, где $o_\hbar(1)$ — бесконечно малая величина по $\hbar$, а константа C определяется максимальными значениями модулей первых и вторых производных функции Гамильтона $H(x, p)$, когда координаты и импульсы принадлежат физической области значений для данного процесса.*

Доказательство утверждения 2 отложим на конец раздела.

Для оценки времени переходного процесса, описанного в теореме 4, перепишем уравнение утверждения 1 в виде:

$$dt = \frac{d\eta}{\alpha(t)\sqrt{1-\eta}\sqrt{\eta} + \beta(t)(1-\eta)\eta} \quad \text{или}$$

$$t = \int\limits_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{d\eta}{\alpha(t)\sqrt{1-\eta}\sqrt{\eta} + \beta(t)(1-\eta)\eta} \leq \int\limits_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{d\eta}{-\alpha_{max}\sqrt{1-\eta}\sqrt{\eta} + \beta_{min}(1-\eta)\eta}, \tag{45}$$

где интеграл берется по интервалу $(\varepsilon, 1-\varepsilon)$, на котором знаменатель подынтегрального выражения последнего интеграла положителен. Простые вычисления показывают, что для этого требуется выполнение неравенств

$$\frac{1}{2} > \varepsilon > \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{\alpha_{max}^2}{\beta_{min}^2}}. \tag{46}$$

Если учесть, что $\beta_{min} = 2ab/\hbar$ (см. утверждение 1) и $\alpha_{max} = (C + o_\hbar(1))/\sqrt{\hbar}$ (см. утверждение 2), то, при $\hbar \to 0$, правая часть предыдущего неравенства разложением в ряд Тейлора может быть представлена в виде:

$$\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{\alpha_{max}^2}{\beta_{min}^2}} = \frac{\alpha_{max}^2}{\beta_{min}^2} + O\left(\frac{\alpha_{max}}{\beta_{min}}\right)^4 = \frac{C^2\hbar}{4a^2b^2} + o\left(\frac{\hbar}{ab}\right).$$

Отсюда и из неравенства (46) получаем, что число ε можно выбрать произвольным (малым, при $\hbar \to 0$), удовлетворяющим неравенству

$$\frac{1}{2} > \varepsilon > \frac{C^2\hbar}{4a^2b^2} + o\left(\frac{\hbar}{ab}\right). \tag{47}$$

Последний интеграл в неравенстве (45) вида:

$$t_\varepsilon \stackrel{def}{=} \int\limits_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{d\eta}{-\alpha_{max}\sqrt{1-\eta}\sqrt{\eta} + \beta_{min}(1-\eta)\eta}, \tag{48}$$

был вычислен с использованием системы Mathematica 5.0 (см. [14]), и результат разложен в ряд по β_{min} при $\beta_{min} \to \infty$. Эти вычисления дают следующее равенство:

$$t_\varepsilon = \frac{4\,arctanh(1-2\varepsilon)}{\beta_{min}} + \frac{4(1-2\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon(1-\varepsilon)}}\frac{\alpha_{max}}{\beta_{min}^2} + O\left(\frac{1}{\beta_{min}^3}\right), \tag{49}$$

где $arctanh(x) = (ln(1+x) - ln(1-x))/2$ — гиперболический арктангенс.

Если считать, что ε и $\hbar$ — малые величины, то подставив в это равенство выражения для $\beta_{min} = 2ab/\hbar$ и $\alpha_{max} = (C + o_\hbar(1))/\sqrt{\hbar}$ из утверждений 1и 2

и, разложив полученное выражение в ряд по ε, можно получить следующую оценку:

$$t_\varepsilon = (-\ln\ \varepsilon + o(\varepsilon))\frac{\hbar}{ab} + \frac{(1+o(\varepsilon))}{\sqrt{\varepsilon}}\frac{C}{\sqrt{\hbar}}\left(\frac{\hbar}{ab}\right)^2 + O\left(\frac{\hbar^2}{a^2b^2}\right). \qquad (50)$$

Из неравенства (45), формул (47), (48), (50) и определения функции $\eta(t)$ (40) непосредственно выводится следующее утверждение.

Утверждение 3 *Пусть $\bar{\varphi}(x,p,t)$ — нормализованное решение уравнения (2), и в начальный момент при $t=0$ выполняется неравенство $\eta(0) \stackrel{def}{=} ||P_0\bar{\varphi}(x,p,0)||^2 \geq \varepsilon$, где P_0 — оператор проекции теоремы 2 и ε — произвольное число, удовлетворяющее неравенствам*

$$\frac{1}{2} > \varepsilon > \frac{C^2\hbar}{4a^2b^2} + o\left(\frac{\hbar}{ab}\right).$$

Тогда, при любом $t > t_\varepsilon$, где

$$t_\varepsilon = (-\ln\ \varepsilon + o(\varepsilon))\frac{\hbar}{ab} + \frac{(1+o(\varepsilon))}{\sqrt{\varepsilon}}\frac{C}{\sqrt{\hbar}}\left(\frac{\hbar}{ab}\right)^2 + O\left(\frac{\hbar^2}{a^2b^2}\right),$$

величина $\eta(t) \stackrel{def}{=} ||P_0\bar{\varphi}(x,p,t)||^2 \geq 1-\varepsilon$, то есть квадрат расстояния от функции $\bar{\varphi}(x,p,t)$ до подпространства стационарных решений диффузионного уравнения, описываемых теоремой 1, будет меньше или равен ε.

Доказываемый нами в этом подразделе пункт 1) теоремы 4 непосредственно следует из утверждения 3. Для завершения доказательства осталось доказать утверждение 2.

Доказательство утверждения 2. В доказательстве утверждения 2 нам потребуются вычисления некоторых интегралов, содержащих под интегралом функцию $\chi(y)$, заданную выражением (26) теоремы 1. Результаты вычисления этих интегралов сведены в следующие две леммы.

Лемма 1 *Пусть $\tilde{\chi}$ — преобразование Фурье от функции χ, где $\chi(y) = (b/a\pi\hbar)^{n/4}\, exp(-by^2/(2a\hbar))$. Тогда верно равенство:*

$$\tilde{\chi}(k) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{n/2}}\int_{R^n}\chi(y)e^{\frac{iyk}{\hbar}}dy = \left(\frac{a}{b\pi\hbar}\right)^{n/4}e^{-\frac{ak^2}{2b\hbar}}. \qquad (51)$$

Наоборот, преобразование Фурье от $\tilde{\chi}$ дает χ. То есть

$$\chi(y) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{n/2}}\int_{R^n}\tilde{\chi}(k)e^{\frac{iyk}{\hbar}}dy. \qquad (52)$$

Имеются более общие интегралы:

$$\frac{1}{(2\pi\hbar)^{n/2}}\int_{R^n}\chi(x-y)e^{\frac{iy(p-k)}{\hbar}}dy=\tilde{\chi}(p-k)e^{\frac{ix(p-k)}{\hbar}}, \tag{53}$$

$$\frac{1}{(2\pi\hbar)^{n/2}}\int_{R^n}\tilde{\chi}(p-k)e^{\frac{ik(x-y)}{\hbar}}dk=\chi(x-y)e^{\frac{ip(x-y)}{\hbar}}. \tag{54}$$

Функции χ и $\tilde{\chi}$ удовлетворяют соотношениям:

$$\chi(\alpha)\chi(\beta)=\chi\left(\frac{\alpha+\beta}{\sqrt{2}}\right)\chi\left(\frac{\alpha-\beta}{\sqrt{2}}\right) \quad и \quad \tilde{\chi}(\alpha)\tilde{\chi}(\beta)=\tilde{\chi}\left(\frac{\alpha+\beta}{\sqrt{2}}\right)\tilde{\chi}\left(\frac{\alpha-\beta}{\sqrt{2}}\right). \tag{55}$$

Производные функций $\chi(y)$ и $\tilde{\chi}(k)$ имеют вид:

$$\frac{\partial\chi(y)}{\partial y_j}=-b/(a\hbar)\ y_j\chi(y); \qquad \frac{\partial\tilde{\chi}'(k)}{\partial k_j}=-a/(b\hbar)\ k_j\tilde{\chi}(k). \tag{56}$$

Функций χ^2 и $\tilde{\chi}^2$ являются плотностями нормального распределения в конфигурационном пространстве и пространстве импульсов, соответственно, с нулевыми математическими ожиданиями и дисперсиями, равными $a\hbar/(2b)$ и $b\hbar/(2a)$. То есть верны следующие равенства для функции χ:

$$\int_{R^n}\chi^2(\eta)d\eta=1; \qquad \int_{R^n}\eta_i\chi^2(\eta)d\eta=0,\ i=1,\dots,n;$$

$$\int_{R^n}\eta_i\eta_j\chi^2(\eta)d\eta=0,\ при\ i\neq j; \quad \int_{R^n}\eta_i^2\chi^2(\eta)d\eta=a\hbar/(2b),\ i=1,\dots,n. \tag{57}$$

Остальные моменты имеют порядок $o(\hbar)$. Аналогичные равенства верны для функции $\tilde{\chi}$:

$$\int_{R^n}\tilde{\chi}^2(\xi)d\xi=1; \qquad \int_{R^n}\xi_i\tilde{\chi}^2(\xi)d\xi=0,\ i=1,\dots,n;$$

$$\int_{R^n}\xi_i\xi_j\tilde{\chi}^2(\xi)d\xi=0,\ при\ i\neq j; \quad \int_{R^n}\xi_i^2\tilde{\chi}^2(\xi)d\xi=b\hbar/(2a),\ i=1,\dots,n. \tag{58}$$

Кроме того, верны равенства

$$\frac{1}{(2\pi\hbar)^{n/2}}\int_{R^n}\eta_i\xi_j\chi(\eta)\tilde{\chi}(\xi)e^{\frac{i\eta\xi}{\hbar}}d\eta d\xi=0,\ при\ i\neq j; \tag{59}$$

$$\frac{1}{(2\pi\hbar)^{n/2}}\int_{R^n}\eta_j\xi_j\chi(\eta)\tilde{\chi}(\xi)e^{\frac{i\eta\xi}{\hbar}}d\eta d\xi=\frac{i\hbar}{2},\ j=1,\dots,n. \tag{60}$$

Все интегралы леммы 1, кроме последнего (60), общеизвестны. Последний интеграл автор вычислил с использованием системы Mathematica 5.0 [14].

Лемма 2 *Пусть*

$$D = \frac{1}{(2\pi\hbar)^n 2^{n/2}}\ \chi(\eta)\ \chi\Big(\eta'/\sqrt{2}\Big)\ \tilde{\chi}\Big(\xi'/\sqrt{2}\Big)\ \tilde{\chi}(\xi) e^{i(\eta\xi+\eta\xi'+\eta'\xi+\eta'\xi'/2)/\hbar}. \tag{61}$$

Тогда верны следующие равенства:

1) $\int_{R^{4n}} Dd\eta\ d\xi\ d\eta' d\xi' = 1;$ 2) $\int_{R^{4n}} \eta_j Dd\eta\ d\xi\ d\eta' d\xi' = 0, \quad j = 1, \ldots, n;$

3) $\int_{R^{4n}} (\eta_j + \eta'_j) Dd\eta\ d\xi\ d\eta' d\xi' = 0, \quad j = 1, \ldots, n;$

4) $\int_{R^{4n}} \xi_j Dd\eta\ d\xi\ d\eta' d\xi' = 0, \quad j = 1, \ldots, n;$

5) $\int_{R^{4n}} (\xi_j + \xi'_j) Dd\eta\ d\xi\ d\eta' d\xi' = 0, \quad j = 1, \ldots, n;$

6) $\int_{R^{4n}} \eta_i(\eta_j + \eta'_j) Dd\eta\ d\xi\ d\eta' d\xi' = 0, \quad i, j = 1, \ldots, n;$

7) $\int_{R^{4n}} (\xi_i + \xi'_i)\xi_j Dd\eta\ d\xi\ d\eta' d\xi' = 0, \quad i, j = 1, \ldots, n;$

8) $\int_{R^{4n}} \eta_i\eta_j Dd\eta\ d\xi\ d\eta' d\xi' = 0, \quad npu \quad i \neq j;$

$\int_{R^{4n}} \eta_j^2 Dd\eta\ d\xi\ d\eta' d\xi' = a\hbar/(2b), \quad j = 1, 2 \ldots, n;$

9) $\int_{R^{4n}} (\eta_i + \eta'_i)(\eta_j + \eta'_j) Dd\eta\ d\xi\ d\eta' d\xi' = 0, \quad npu \quad i \neq j;$

$\int_{R^{4n}} (\eta_j + \eta'_j)^2 Dd\eta\ d\xi\ d\eta' d\xi' = a\hbar/(2b), \quad j = 1, 2 \ldots, n;$

10) $\int_{R^{4n}} \xi_i\xi_j Dd\eta\ d\xi\ d\eta' d\xi' = 0, \quad () \quad i \neq j;$

$\int_{R^{4n}} \xi_j^2 Dd\eta\ d\xi\ d\eta' d\xi' = b\hbar/(2a), \quad j = 1, 2 \ldots, n;$

11) $\int_{R^{4n}} (\xi_i + \xi'_i)(\xi_j + \xi'_j) Dd\eta\ d\xi\ d\eta' d\xi' = 0, \quad npu \quad i \neq j;$

$\int_{R^{4n}} (\xi_j + \xi'_j)^2 Dd\eta\ d\xi\ d\eta' d\xi' = b\hbar/(2a), \quad j = 1, 2 \ldots, n;$

12) $\int_{R^{4n}} \eta_i\xi_j Dd\eta\ d\xi\ d\eta' d\xi' = 0, \quad i, j = 1, \ldots, n;$

13) $\int_{R^{4n}} \eta'_i\xi'_j Dd\eta\ d\xi\ d\eta' d\xi' = 0, \quad i, j = 1, \ldots, n;$

14) $\int_{R^{4n}} \eta_i(\xi_j + \xi'_j) Dd\eta\ d\xi\ d\eta' d\xi' = 0, \quad npu \quad i \neq j;$

$\int_{R^{4n}} \eta_j(\xi_j + \xi'_j) Dd\eta\ d\xi\ d\eta' d\xi' = i\hbar/2, \quad j = 1, 2 \ldots, n;$

15) $\int_{R^{4n}} \xi_i(\eta_j + \eta'_j) Dd\eta\ d\xi\ d\eta' d\xi' = 0, \quad npu \quad i \neq j;$

$\int_{R^{4n}} \xi_j(\eta_j + \eta'_j) Dd\eta\ d\xi\ d\eta' d\xi' = i\hbar/2, \quad j = 1, 2 \ldots, n;$

16) $\int_{R^{4n}} (\xi_i + \xi'_i)(\eta_j + \eta'_j) Dd\eta\ d\xi\ d\eta' d\xi' = 0, \quad npu \quad i \neq j;$

$\int_{R^{4n}} (\xi_j + \xi'_j)(\eta_j + \eta'_j) Dd\eta\ d\xi\ d\eta' d\xi' = i\hbar, \quad j = 1, 2 \ldots, n.$

Доказательство леммы 2 основано на использовании формул леммы 1. Приведем здесь вычисления первого интеграла леммы 2. Остальные интегралы вычисляются аналогично.

Для первого интеграла после подстановки в него вместо D выражения (61) получим:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(2\pi\hbar)^n 2^{n/2}}\int_{R^{4n}} \chi(\eta)\chi\left(\eta'/\sqrt{2}\right)\tilde{\chi}\left(\xi'/\sqrt{2}\right)\tilde{\chi}(\xi)e^{i(\eta\xi+\eta\xi'+\eta'\xi+\eta'\xi'/2)/\hbar}d\eta\ d\xi\ d\eta' d\xi' \\
&= \{\ \ \xi \quad (52)\} \\
&= \frac{1}{(2\pi\hbar)^{n/2}2^{n/2}}\int_{R^{3n}} \chi(\eta)\chi\left(\eta'/\sqrt{2}\right)\tilde{\chi}\left(\xi'/\sqrt{2}\right)\chi(\eta+\eta')e^{i(\eta+\eta'/2)\xi'/\hbar}d\eta d\eta' d\xi' \\
&= \{\ \ \xi'/\sqrt{2} \quad (52)\} \\
&= \int_{R^{2n}} \chi(\eta)\chi\left(\eta'/\sqrt{2}\right)\chi\left(\sqrt{2}\eta+\eta'/\sqrt{2}\right)\chi(\eta+\eta')d\eta d\eta' = \\
&= \{\ \ \chi \quad (55)\} \\
&= \int_{R^{2n}} \chi^2(\eta)\chi^2(\eta+\eta')d\eta d\eta' = 1 \ \ \{\ \ (57)\}.
\end{aligned}$$

В доказательстве утверждения 2 потребуются также усреднения функций $F(x,p)$ на фазовом пространстве $(x,p) \in R^{2n}$ по плотности распределения

$$W'_\psi = \frac{1}{(2\pi\hbar)^n}\int_{R^n} \psi(x)\psi^*(y)e^{\frac{i(y-x)p}{\hbar}}dy. \tag{62}$$

Эта плотность похожа на квазираспределение Вигнера, но не совпадает с ним.

Обозначим через $\bar{F}_{W'_\psi}$ среднее значение функции $F(x,p)$ по плотности W'_ψ. То есть

$$\bar{F}_{W'_\psi} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^n}\int_{R^{3n}} F(x,p)\psi(x)\psi^*(y)e^{\frac{i(y-x)p}{\hbar}}dydxdp. \tag{63}$$

Лемма 3 *Если $F(x,p)$ — гладкая функция, которая сама вместе со своими производными на бесконечности растет не быстрее многочлена, а $\psi(x)$ — произвольная гладкая комплекснозначная функция, быстро убывающая на бесконечности, то выполняется равенство*

$$\lim_{\hbar\to 0}\bar{F}_{W'_\psi} = \int_{R^n} F(x,0)\psi(x)\psi^*(x)dx.$$

Доказательство леммы 3. Прозведем под интегралом (63) замену переменных, вида $k = p/\hbar$, и выполним интегрирование по y. Получим,

$$\begin{aligned}
\bar{F}_{W'_\psi} &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{R^{3n}} F(x,\hbar k)\psi(x)\psi^*(y)e^{i(y-x)k}dydxdk = \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{R^{2n}} F(x,\hbar k)\psi(x)\tilde{\psi}^*(k)e^{-ixk}dxdk,
\end{aligned} \tag{64}$$

где

$$\tilde{\psi^*}(k) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{R^n} \psi^*(y) e^{iyk} dy$$

— преобразование Фурье функции $\psi^*(y)$. Так как функция $\psi^*(y)$ — быстро убываюшая функция, то и ее преобразование Фурье $\tilde{\psi}^*(k)$ — быстро убывающая функция на бесконечности.

Так как $\hbar$ — малая величина, то разложим гладкую функцию $F(x, \hbar k)$ по $\hbar k$ по формуле Тейлора до членов первого порядка. Имеем,

$$F(x, \hbar k) = F(x, 0) + \hbar \sum_{i=1}^{n} k_i \frac{\partial F}{\partial p_i}(x, \theta \hbar k),$$

где

$$\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n) \text{ и } 0 \leq \theta_i \leq 1 \text{ при } i = 1, \ldots, n.$$

Подставим это выражение функции $F(x, \hbar k)$ в (64) . Получим,

$$\begin{aligned}
\bar{F}_{W'_\psi} &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{R^{2n}} \left(F(x,0) + \hbar \sum_{i=1}^{n} k_i \frac{\partial F}{\partial p_i}(x, \theta \hbar k) \right) \psi(x) \tilde{\psi^*}(k) e^{-ixk} dx dk = \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{R^{2n}} F(x,0) \psi(x) \tilde{\psi^*}(k) e^{-ixk} dx dk + \\
&\quad + \frac{\hbar}{(2\pi)^{n/2}} \int_{R^{2n}} \sum_{i=1}^{n} k_i \frac{\partial F}{\partial p_i}(x, \theta \hbar k) \psi(x) \tilde{\psi^*}(k) e^{-ixk} dx dk. \qquad (65)
\end{aligned}$$

Оценим коэффициент при $\hbar$ во втором слагаемом полученного равенства. Имеем,

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{R^{2n}} \sum_{i=1}^{n} k_i \frac{\partial F}{\partial p_i}(x, \theta \hbar k) \psi(x) \tilde{\psi^*}(k) e^{-ixk} dx dk \right| \leq \\
&\leq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{R^{2n}} \left| \sum_{i=1}^{n} k_i \frac{\partial F}{\partial p_i}(x, \theta \hbar k) \right| |\psi(x)| \, |\tilde{\psi^*}(k)| dx dk = \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \lim_{r \to \infty} \int\limits_{D_r = \{||(x,k)|| \leq r\}} \left| \sum_{i=1}^{n} k_i \frac{\partial F}{\partial p_i}(x, \theta \hbar k) \right| |\psi(x)| \, |\tilde{\psi^*}(k)| dx dk \leq \\
&\leq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \lim_{r \to \infty} \int\limits_{D_r} \max_{(x,k) \in D_r} \left(\left| \sum_{i=1}^{n} k_i \frac{\partial F}{\partial p_i}(x, \theta \hbar k) \right| \right) |\psi(x)| \, |\tilde{\psi^*}(k)| dx dk \leq \\
&\leq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \lim_{r \to \infty} \int\limits_{D_r} \max_{(x,k) \in D_r} \left(\left| \sum_{i=1}^{n} k_i \frac{\partial F}{\partial p_i}(x, \hbar k) \right| \right) |\psi(x)| \, |\tilde{\psi^*}(k)| dx dk = \\
&= \lim_{r \to \infty} \int\limits_{D_r} O(x^N, k^N) |\psi(x)| \, |\tilde{\psi^*}(k)| dx dk = M.
\end{aligned}$$

Последние равенства следуют из того, что по условию леммы 3 выражение в интеграле, стоящее под операцией max, растет как многочлен не быстрее некоторой степени N по каждой переменной, а $|\psi(x)|$ и$|\tilde{\psi}^*(k)|$ — быстро убывающие функции (убывающие быстрее любой степени на бесконечности), то предел при $r \to \infty$ интеграла от положительной быстро убывающей функции существует и равен некоторой величине M.

Из формулы (65) и доказанной ограниченности коэффициента при $\hbar \to 0$ во втором слагаемом этой формулы следует, что

$$\bar{F}_{W'_\psi} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{R^{2n}} F(x,0)\psi(x)\tilde{\psi}^*(k)e^{-ixk}dxdk + O(\hbar).$$

Отсюда,

$$\lim_{\hbar\to 0} \bar{F}_{W'_\psi} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{R^{2n}} F(x,0)\psi(x)\tilde{\psi}^*(k)e^{-ixk}dxdk = \\ = \int_{R^n} F(x,0)\psi(x)\psi^*(x)dx.$$

Последнее равенство получено вычислением интеграла по k. Этот интеграл по k является обратным преобразованием Фурье функции $\tilde{\psi}^*(k)$ и дает функцию $\psi^*(x)$. Доказательство леммы 3 получено.

Распределение $W'\psi$ не является, также как распределение Вигнера, неотрицательным, а распределение ρ_ψ, заданное выражением (29) для волновой функции ψ, является неотрицательным.

Обозначим через $\bar{F}_{\rho_\psi}$ среднее от функции $F(x,p)$ по распределению ρ. То есть

$$\bar{F}_{\rho_\psi} = \int_{R^{2n}} F(x,p)\rho_\psi(x,p)dxdp = \\ = \frac{1}{(2\pi\hbar)^n} \int_{R^{4n}} F(x,p)\psi(y)\psi^*(y')\chi(x-y)\chi(x-y')e^{i(y'-y)p/\hbar}dydy'dxdp. \quad (66)$$

Лемма 4 *Если $F(x,p)$ — гладкая функция, которая сама вместе со своими производными на бесконечности растет не быстрее многочлена, а $\psi(x)$ — произвольная гладкая комплекснозначная функция, быстро убывающая на бесконечности, то выполняется равенство*

$$\bar{F}_{W'_\psi} = \bar{F}_{\rho_\psi} + O(h) = \bar{F}_{\rho_\psi} + o_\hbar(1), \quad (67)$$

где $o_\hbar(1)$ — бесконечно малая величина по $\hbar$.

Доказательство леммы 4. Рассмотрим $\bar{F}_{\rho_\psi}$, заданное выражением (66). Представим функцию $\bar{\psi}^*(y')$, используя композицию прямого и обратного преобразования Фурье (15), в виде:

$$\bar{\psi}^*(y') = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[\bar{\psi}^*(y''), y'' \to k], k \to y'],$$

то есть в виде:

$$\bar{\psi}^*(y') = \frac{1}{(2\pi\hbar)^n} \int_{R^{2n}} \bar{\psi}^*(y'') e^{\frac{i(y''-y')k}{\hbar}} dk\ dy''.$$

Подставим это выражение в выражение (66). После простых преобразований под интегралом получим:

$$\bar{F}_{\rho_\psi} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{2n}} \int_{R^{6n}} F(x,p)\psi(y)\psi^*(y'')\chi(x-y)\chi(x-y')\times \\ \times e^{i(y''k-yp+y'p-y'k)/\hbar} dy'dydy''dkdxdp. \tag{68}$$

В полученном выражении произведем интегрирование по переменной y' с использованием формулы (53) леммы 1. Получим:

$$\bar{F}_{\rho_\psi} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3n/2}} \int_{R^{5n}} F(x,p)\psi(y)\psi^*(y'')\chi(x-y)\tilde{\chi}(p-k)\times \\ \times e^{i(y''k-yp+xp-xk)/\hbar} dydy''dkdxdp. \tag{69}$$

В полученном выражении сделаем замену переменных, введя новые переменные $\xi = p - k$ и $\eta = x - y$. Тогда $p = k + \xi$, $x = y + \eta$ и

$$\bar{F}_{\rho_\psi} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3n/2}} \int_{R^{5n}} F(y+\eta, k+\xi)\psi(y)\psi^*(y'')\chi(\eta)\tilde{\chi}(\xi)\times \\ \times e^{i(y''k-yk+\eta\xi)/\hbar} d\eta d\xi dydy''dk. \tag{70}$$

Считая η и ξ малыми величинами, разложим функцию $F(y+\eta, k+\xi)$ по формуле Тейлора в точке (y,k) до членов 2-го порядка. Получим следующее выражение, в котором значения функции F и ее производных берутся в точке (y,k),

$$F(y+\eta, k+\xi) = F(y,k) + \sum_{i=1}^{n} (F'_{x_i}\eta_i + F'_{p_i}\xi_i) + \\ + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} (F''_{x_i,x_j}\eta_i\eta_j + 2F''_{x_i,p_j}\eta_i\xi_j + F''_{p_i,p_j}\xi_i\xi_j) + o(\eta^2, \xi^2, \eta\xi). \tag{71}$$

Подставим это разложение вместо функции $F(y+\eta, k+\xi)$ в последний интеграл и произведем интегрирование по переменным η и ξ с использованием формул, выписанных в лемме 1. Получим:

$$\bar{F}_{\rho_\psi}=\frac{1}{(2\pi\hbar)^{2n}}\int\limits_{R^{3n}}\left[F(y,k)+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(F''_{x_j,x_j}\frac{a\hbar}{2b}+F''_{x_j,p_j}(i\hbar)+F''_{p_j,p_j}\frac{b\hbar}{2a}\right)+o(\hbar)\right]\times$$
$$\times\psi(y)\psi^*(y'')e^{i(y''-y)k/\hbar}dydy''dk=$$
$$=\bar{F}_{W'_\psi}+\hbar\bar{S}_{W'_\psi}+o(\hbar), \quad (72)$$

где $S(x,p)=\frac{1}{2}\sum\limits_{j=1}^{n}\left(F''_{x_j,x_j}(a/2b)+iF''_{x_j,p_j}+F''_{p_j,p_j}(b/2a)\right)$ — второе слагаемое под интегралом в выражении (72), деленное на $\hbar$, а средние значения $\bar{F}_{W'_\psi}$ и $\bar{S}_{W'_\psi}$ от функций F и S по распределению W_ψ задаются выражением (63).

Так как по условию леммы 4 функция $F(x,p)$ растет на бесконечности вместе со своими производными не быстрее многочлена, то этим же свойством обладает функция $S(x,p)$. Применим к функции $S(x,p)$ лемму 3. Плучим, что $\bar{S}_{W_\psi}$ ограничено при $\hbar\to 0$. Отсюда и из равенства (72) следует равенство $\bar{F}_{\rho_\psi}=\bar{F}_{W'_\psi}+O(\hbar)$, которое эквивалентно равенству, требуемому в лемме 4.

Итак, все леммы, необходимые для доказательства утверждения 2 доказаны. Перейдем к доказательству самого утверждения 2.

Согласно утверждению 1, $\alpha_{max}\overset{def}{=}2\cdot\max_{\bar\varphi_0}||A\bar\varphi_0-P_0A\bar\varphi_0||$, где A в нашем случае задается выражением (4), оператор проекции P_0 — выражением (27), а нормированные функции $\bar\varphi_0$ задаются выражением (24), и функция $\bar\varphi_0\bar\varphi_0^*$ является распределением вероятностей в физической области фазового пространства для данного процесса.

Если оператор A представляется в виде суммы $A=\sum_{j=1}^{2n+1}A_j$, то по свойству нормы, утверждающей, что норма суммы векторов меньше суммы норм этих векторов, имеем:

$$||A\bar\varphi_0-P_0A\bar\varphi_0||=||\sum_{s=1}^{2n+1}(A_s\bar\varphi_0-P_0A_s\bar\varphi_0)||\le\sum_{s=1}^{2n+1}||A_s\bar\varphi_0-P_0A_s\bar\varphi_0||. \quad (73)$$

Поэтому, для оценки величины $||A\bar\varphi_0-P_0A\bar\varphi_0||$ нам достаточно оценить величины $||A_s\bar\varphi_0-P_0A_s\bar\varphi_0||$, при $s=1,\dots,2n+1$.

В нашем случае оператор A задается выражением (4):

$$A\varphi=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial x_j}\frac{\partial\varphi}{\partial p_j}-\frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)-\frac{i}{\hbar}\left(H-\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial p_j}p_j\right)\varphi;$$

$$\text{и } A_{2j-1} = \frac{\partial H}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial p_j}, \quad A_{2j} = -\frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial}{\partial x_j}, \quad \text{при } j = 1, \ldots, n;$$

$$\text{а} \quad A_{2n+1} = -\frac{i}{\hbar}f(x,p) = -\frac{i}{\hbar}\left(H - \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial p_j}p_j\right). \tag{74}$$

Заметим также, что, так как P_0 — самосопряженный оператор проекции, то векторы $P_0A_s\bar{\varphi}_0$ и $A_s\bar{\varphi}_0 - P_0A_s\bar{\varphi}_0$ ортогональны. В сумме эти векторы дают $A_s\bar{\varphi}_0$. Поэтому верно равенство

$$||A_s\bar{\varphi}_0 - P_0A_s\bar{\varphi}_0||^2 = ||A_s\bar{\varphi}_0||^2 - ||P_0A_s\bar{\varphi}_0||^2. \tag{75}$$

Начнем оценки этих величин, начиная с $s = 2n + 1$.

1. Случай $A_{2n+1} = -i/\hbar f(x,p)$**.** Оцениваем $||A_{2n+1}\bar{\varphi}_0 - P_0A_{2n+1}\bar{\varphi}_0||^2$, когда оператор A_{2n+1} есть оператор умножения на функцию $-i/\hbar f(x,p)$ и

$$f(x,p) = H - \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial p_j}p_j. \tag{76}$$

1.1. Оценка $||A_{2n+1}\bar{\varphi}_0||^2$**.** В этом случае для величины $||A_{2n+1}\bar{\varphi}_0||^2 = \langle A_{2n+1}\bar{\varphi}_0; A_{2n+1}\bar{\varphi}_0\rangle$ после подстановки в нее $i/\hbar f(x,p)$ вместо A_{2n+1}, выражений (24) для $\bar{\varphi}_0$ и умножения обеих частей равенства на $\hbar^2$ имеем:

$$\begin{aligned}\hbar^2||A_{2n+1}\bar{\varphi}_0||^2 &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^n}\int_{R^{2n}}dxdp\ f^2(x,p)\int_{R^n}dy\ \bar{\psi}(y)\chi(x-y)e^{\frac{i(x-y)p}{\hbar}}\times\\ &\times\int_{R^n}\bar{\psi}^*(y')\chi(x-y')e^{\frac{i(y'-x)p}{\hbar}}dy' =\\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^{n/2}}\int_{R^{2n}}dxdpf^2(x,p)\int_{R^n}dy\ \bar{\psi}(y)\chi(x-y)e^{\frac{i(x-y)p}{\hbar}}I_{int},\end{aligned} \tag{77}$$

где

$$I_{int} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{n/2}}\int_{R^n}\bar{\psi}^*(y')\chi(x-y')e^{\frac{i(y'-x)p}{\hbar}}dy'. \tag{78}$$

Для преобразования в этом выражении интеграла I_{int} представим функцию $\bar{\psi}^*(y')$, используя композицию прямого и обратного преобразования Фурье (15), в виде:

$$\bar{\psi}^*(y') = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[\bar{\psi}^*(y''), y'' \to k], k \to y'],$$

то есть в виде:

$$\bar{\psi}^*(y') = \frac{1}{(2\pi\hbar)^n}\int_{R^{2n}}\bar{\psi}^*(y'')e^{\frac{i(y''-y')k}{\hbar}}dk\ dy''.$$

Подставим это выражение в выражение (78) для I_{int}. Получим:

$$I_{int} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3n/2}} \int_{R^{3n}} \bar{\psi}^*(y'') e^{\frac{i(y''-y')k}{\hbar}} \chi(x-y') e^{\frac{i(y'-x)p}{\hbar}} dy'dkdy'' =$$
$$= \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3n/2}} \int\limits_{R^{2n}} \bar{\psi}^*(y'') e^{\frac{i(y''k-xp)}{\hbar}} \int\limits_{R^n} \chi(x-y') e^{\frac{iy'(p-k)}{\hbar}} dy'dkdy''. \quad (79)$$

Вычислим последний интеграл по y' формуле (53) леммы 1. После подстановки получим:

$$I_{int} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{n}} \int_{R^{2n}} \bar{\psi}^*(y'') e^{\frac{i(y''k-xp)}{\hbar}} \tilde{\chi}(p-k) e^{\frac{ix(p-k)}{\hbar}} dkdy'' =$$
$$= \frac{1}{(2\pi\hbar)^{n}} \int_{R^{2n}} \bar{\psi}^*(y'') \tilde{\chi}(p-k) e^{\frac{i(y''k-xk)}{\hbar}} dkdy''. \quad (80)$$

Подставим полученное выражения для I_{int} в выражение (77) для $\hbar^2||A_{2n+1}\bar{\varphi}_0||^2$. После простейших преобразований получим:

$$\hbar^2||A_{2n+1}\bar{\varphi}_0||^2 = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3n/2}} \int_{R^{5n}} f^2(x,p)\bar{\psi}(y)\bar{\psi}^*(y'')\chi(x-y)\tilde{\chi}(p-k)\times$$
$$\times e^{\frac{i(y''k-yp+xp-xk)}{\hbar}} dk\ dy''\ dy\ dx\ dp. \quad (81)$$

В полученном выражении сделаем замену переменных, введя новые переменные $\xi = p-k$ и $\eta = x-y$. Тогда $p = k+\xi$, $x = y+\eta$ и

$$\hbar^2||A_{2n+1}\bar{\varphi}_0||^2 = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3n/2}} \int_{R^{5n}} f^2(y+\eta,k+\xi)\bar{\psi}(y)\bar{\psi}^*(y'')\chi(\eta)\tilde{\chi}(\xi)\times$$
$$\times e^{\frac{i(y''k-yk+\eta\xi)}{\hbar}} dk\ dy''\ dy\ d\eta\ d\xi. \quad (82)$$

Считая η и ξ малыми величинами, разложим функцию $f^2(y+\eta,k+\xi)$ в ряд Тейлора в точке (y,k) до членов 2-го порядка. Получим следующее выражение, в котором значения функции f и ее производных берутся в точке (y,k),

$$f^2(y+\eta,k+\xi) = f^2 + \sum_{i=1}^{n}(2ff'_{x_i}\eta_i + 2ff'_{p_i}\xi_i) + \sum_{i,j=1}^{n}[(f'_{x_j}f'_{x_i} + ff''_{x_i,x_j})\eta_i\eta_j +$$
$$+(f'_{x_j}f'_{p_i} + ff''_{p_i,x_j})\xi_i\eta_j + (f'_{p_j}f'_{x_i} + ff''_{x_i,p_j})\eta_i\xi_j +$$
$$+(f'_{p_j}f'_{p_i} + ff''_{p_i,p_j})\xi_i\xi_j] + o(\eta^2,\xi^2,\eta\xi). \quad (83)$$

Подставим это разложение вместо функции $f^2(y+\eta,k+\xi)$ в последний интеграл и произведем интегрирование по переменным η и ξ с

использованием формул, выписанных в лемме 1. Получим:

$$\hbar^2||A_{2n+1}\bar{\varphi}_0||^2 = \frac{1}{(2\pi\hbar)^n}\int_{R^{3n}}\Bigg[f^2+\sum_{j=1}^{n}\Bigg[(f'_{x_j}f'_{x_j}+ff''_{x_j,x_j})\frac{a\hbar}{2b}+$$
$$+(f'_{x_j}f'_{p_j}+ff''_{p_j,x_j})i\hbar+(f'_{p_j}f'_{p_j}+ff''_{p_j,p_j})\frac{b\hbar}{2a}\Bigg]+o(\hbar)\Bigg]\times$$
$$\times\bar{\psi}(y)\bar{\psi}^*(y'')e^{\frac{i(y''k-yk)}{\hbar}}dk\ dy''\ dy. \tag{84}$$

1.2. Оценка $||P_0A_{2n+1}\bar{\varphi}_0||^2$**.** Оценим, теперь, вычитаемое в выражении (75), то есть $||P_0A_{2n+1}\bar{\varphi}_0||^2 = \langle P_0A_{2n+1}\bar{\varphi}_0; A_{2n+1}\bar{\varphi}_0\rangle$, где оператор A_{2n+1} — это умножение на гладкую функцию $-i/\hbar f(x,p)$. Раскрыв это выражение со скалярным произведением и подставив в него выражение для оператора A_{2n+1}, выражение (24) для $\bar{\varphi}_0$ и выражение (27) для оператора P_0, представленное в обозначениях леммы 1 в виде

$$P_0\varphi = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{n/2}2^{n/2}}\int_{R^{2n}}\varphi(x',p')\chi\left(\frac{x-x'}{\sqrt{2}}\right)\tilde{\chi}\left(\frac{p'-p}{\sqrt{2}}\right)e^{\frac{i(x-x')(p+p')}{2\hbar}}dx'dp',$$

а также умножив обе части равенства на $\hbar^2$, получим:

$$\hbar^2||P_0A_{2n+1}\bar{\varphi}_0||^2 = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3n/2}2^{n/2}}\int_{R^{6n}}\bar{\psi}(y)\chi(x'-y)e^{\frac{i(x'-y)p'}{\hbar}}f(x',p')\times$$
$$\times\chi\left(\frac{x-x'}{\sqrt{2}}\right)\tilde{\chi}\left(\frac{p'-p}{\sqrt{2}}\right)e^{\frac{i(x-x')(p+p')}{2\hbar}}f(x,p)\times$$
$$\times\bar{\psi}^*(y')\chi(x-y')e^{\frac{i(y'-x)p}{\hbar}}dy'\ dy\ dx'\ dp'\ dx\ dp=$$
$$=\frac{1}{(2\pi\hbar)^n2^{n/2}}\int_{R^{5n}}\bar{\psi}(y)\chi(x'-y)e^{\frac{i(x'-y)p'}{\hbar}}f(x',p')\times$$
$$\times\chi\left(\frac{x-x'}{\sqrt{2}}\right)\tilde{\chi}\left(\frac{p'-p}{\sqrt{2}}\right)e^{\frac{i(x-x')(p+p')}{2\hbar}}\times$$
$$\times f(x,p)\ I_{int}\ dy\ dx'\ dp'\ dx\ dp. \tag{85}$$

где

$$I_{int} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{n/2}}\int_{R^n}\bar{\psi}^*(y')\chi(x-y')e^{\frac{i(y'-x)p}{\hbar}}dy'.$$

Интеграл I_{int} такой же, как в (78) при вычислении $\hbar^2||A_{2n+1}\bar{\varphi}_0||^2$. Подставим в выражение (85) представление интеграла I_{int} в виде (80). После простых преобразований получим:

$$\hbar^2||P_0A_{2n+1}\bar{\varphi}_0||^2=\frac{1}{(2\pi\hbar)^{2n}2^{n/2}}\int_{R^{7n}}f(x',p')f(x,p)\bar{\psi}(y)\bar{\psi}^*(y'')\times$$
$$\times\chi(x'-y)\chi\left(\frac{x-x'}{\sqrt{2}}\right)\tilde{\chi}\left(\frac{p'-p}{\sqrt{2}}\right)\tilde{\chi}(p-k)\times$$
$$\times e^{\frac{i(x-x')(p+p')}{2\hbar}+\frac{i(y''k-yp'+x'p'-xk)}{\hbar}}dkdy''dydx'dp'dxdp. \tag{86}$$

В полученном интеграле сделаем замену переменных, введя новые переменные: $\eta = x' - y, \quad \xi = p - k, \quad \eta' = x - x', \quad \xi' = p' - p.$

Тогда, $x' = y + \eta, \quad p = k + \xi, \quad x = y + \eta + \eta', \quad p' = k + \xi + \xi'.$

После подстановки x', x, p, p', выраженных через новые переменные, и простых преобразований получим:

$$\hbar^2||P_0A_{2n+1}\bar{\varphi}_0||^2=\frac{1}{(2\pi\hbar)^{2n}2^{n/2}}\int_{R^{7n}} f(y+\eta,k+\xi+\xi')f(y+\eta+\eta',k+\xi)\times$$
$$\times\bar{\psi}(y)\bar{\psi}^*(y'')\chi(\eta)\chi\left(\eta'/\sqrt{2}\right)\tilde{\chi}\left(\xi'/\sqrt{2}\right)\tilde{\chi}(\xi)\times$$
$$\times e^{\frac{i(y''-y)k}{\hbar}+\frac{i(\eta\xi+\eta\xi'+\eta'\xi)}{\hbar}+\frac{i\eta'\xi'}{2\hbar}}dk\ dy''dy\ d\eta\ d\xi\ d\eta' d\xi'. \quad (87)$$

Так как функции χ^2 и $\tilde{\chi}^2$ задают плотности нормальных распределений с малыми дисперсиями, разложим в предыдущем выражении функцию $f(y+\eta,k+\xi+\xi')f(y+\eta+\eta',k+\xi)$ в ряд Тейлора в точке (y,k) до членов второго порядка, считая величины η, η', ξ, ξ' малыми. Имеем,

$$f(y+\eta,k+\xi+\xi')f(y+\eta+\eta',k+\xi)=$$
$$=f^2(y,k)+\sum_{j=1}^{n}[ff'_{x_j}\eta_j+ff'_{p_j}(\xi_j+\xi'_j)+ff'_{x_j}(\eta_j+\eta'_j)+ff'_{p_j}\xi_j]+$$
$$+\sum_{i,j=1}^{n}[f'_{x_i}f'_{x_j}\eta_i(\eta_j+\eta'_j)+f'_{x_i}f'_{p_j}\eta_i\xi_j+f'_{p_i}f'_{x_j}(\xi_i+\xi'_i)(\eta_j+\eta'_j)+f'_{p_i}f'_{p_j}(\xi_i+\xi'_i)\xi_j]+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}f[f''_{x_i,x_j}\eta_i\eta_j+f''_{x_i,p_j}\eta_i(\xi_j+\xi'_j)+f''_{p_i,x_j}(\xi_i+\xi'_i)\eta_j+f''_{p_i,p_j}(\xi_i+\xi'_i)(\xi_j+\xi'_j)]+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}f[f''_{x_i,x_j}(\eta_i+\eta'_i)(\eta_j+\eta'_j)+f''_{x_i,p_j}(\eta_i+\eta'_i)\xi_j+f''_{p_i,x_j}\xi_i(\eta_j+\eta'_j)+f''_{p_i,p_j}\xi_i\xi_j]+$$
$$+o\left(\eta^2,(\eta+\eta')^2,\xi^2,(\xi+\xi')^2,\eta(\xi+\xi'),(\eta+\eta')\xi\right). \quad (88)$$

В результате подстановки разложения функции $f(y+\eta,k+\xi+\xi')f(y+\eta+\eta',k+\xi)$ в виде (88) в выражение (87) и вычисления интегралов по η, η', ξ, ξ' с использованием интегралов леммы 2 получим:

$$\hbar^2||P_0A_{2n+1}\bar{\varphi}_0||^2=\frac{1}{(2\pi\hbar)^n}\int_{R^{3n}}[f^2+\sum_{j=1}^{n}[ff''_{x_j,x_j}a\hbar/(2b)+$$
$$+(f'_{x_j}f'_{p_j}+ff''_{x_j,p_j})i\hbar+ff''_{p_j,p_j}b\hbar/(2a)]+o(\hbar)]\times$$
$$\times\bar{\psi}(y)\bar{\psi}^*(y'')e^{\frac{i(y''-y)k}{\hbar}}dk\ dy''dy. \quad (89)$$

Итак, мы оценили выражение $\hbar^2||A_{2n+1}\bar{\varphi}_0||^2$ формулой (84) и выражение $\hbar^2||P_0A_{2n+1}\bar{\varphi}_0||^2$ формулой (89). Подставим эти формулы в выражение (75),

приведем подобные члены и поделим обе части равенства на $\hbar^2$. Получим:

$$||A_{2n+1}\bar{\varphi}_0 - P_0 A_{2n+1}\bar{\varphi}_0||^2 = ||A_{2n+1}\bar{\varphi}_0||^2 - ||P_0 A_{2n+1}\bar{\varphi}_0||^2 =$$
$$= \frac{1}{\hbar}\frac{1}{(2\pi\hbar)^n}\int_{R^{3n}}\left[\sum_{j=1}^{n}\left((f'_{x_j})^2\frac{a}{2b} + (f'_{p_j})^2\frac{b}{2a}\right) + o_\hbar(1)\right]\times$$
$$\times\bar{\psi}(y)\bar{\psi}^*(y'')e^{\frac{i(y''k-yk)}{\hbar}}dk\ dy''\ dy. \qquad (90)$$

Последняя строка выражения (90) представляет собой плотность распределения $W'_{\bar{\psi}}$, заданную выражением (62). Применим к правой части равенства (90) лемму 4. Получим:

$$||A_{2n+1}\bar{\varphi}_0 - P_0 A_{2n+1}\bar{\varphi}_0||^2 = \frac{1}{\hbar}\left[\int\limits_{R^{2n}}\sum_{j=1}^{n}\left((f'_{x_j})^2\frac{a}{2b} + (f'_{p_j})^2\frac{b}{2a}\right)\rho_{\bar{\psi}}ddk + o_\hbar(1)\right] \qquad (91)$$

где $\rho_{\bar{\psi}}(,k)$ — неотрицательная плотность распределения, заданная выражением (29) для функции $\bar{\psi}()$.

Для оценки требуемого выражения $\max_{\bar{\varphi}_0}||A_{2n+1}\bar{\varphi}_0 - P_0 A_{2n+1}\bar{\varphi}_0||$ введем константу C_{2n+1} следующим равенством:

$$C^2_{2n+1} \stackrel{def}{=} \max_{(x,p)\in U}\sum_{j=1}^{n}\left((f'_{x_j})^2\frac{a}{2b} + (f'_{p_j})^2\frac{b}{2a}\right), \qquad (92)$$

где максимум берется по физической области U значений координат и импульсов для данного процесса, в которой лежит носитель функции плотности распределения вероятностей $\rho_{\bar{\psi}}$. Тогда, из равенства (91) следует, что

$$||A_{2n+1}\bar{\varphi}_0 - P_0 A_{2n+1}\bar{\varphi}_0||^2 \le \frac{1}{\hbar}\left(\int\limits_{R^n} C^2_{2n+1}\rho_{\bar{\psi}}dydk + o_\hbar(1)\right) =$$
$$= \left(C^2_{2n+1} + o_\hbar(1)\right)\frac{1}{\hbar}. \qquad (93)$$

Последнее равенство получено из условия нормированности плотности $\rho_{\bar{\psi}}$, то есть равенства $\int_{R^n}\rho_{\bar{\psi}}dydk = 1$. Отсюда, извлекая корень квадратный из обеих частей неравенства, окончательно получим:

$$||A_{2n+1}\bar{\varphi}_0 - P_0 A_{2n+1}\bar{\varphi}_0|| \le \left(C_{2n+1} + o_\hbar(1)\right)\frac{1}{\sqrt{\hbar}}. \qquad (94)$$

Это завершает разбор случая 1.

2. Случай $A_{2j-1} = \frac{\partial H}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial p_j}$**.** Оценим величину $||A_{2j-1}\bar{\varphi}_0 - P_0 A_{2j-1}\bar{\varphi}_0||^2 = ||A_{2j-1}\bar{\varphi}_0||^2 - ||P_0 A_{2j-1}\bar{\varphi}_0||^2$ по той же схеме, что и в предыдущем случае: отдельно оценим $||A_{2j-1}\bar{\varphi}_0||^2$ и $||P_0 A_{2j-1}\bar{\varphi}_0||^2$.

2.1. Оценка $||A_{2j-1}\bar{\varphi}_0||^2$**.** Подставим в $||A_{2j-1}\bar{\varphi}_0||^2 = \langle A_{2j-1}\bar{\varphi}_0; A_{2j-1}\bar{\varphi}_0\rangle$ выражение (24) для $\bar{\varphi}_0$ и положим $A_{2j-1} = \frac{\partial H}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial p_j}$. Имеем:

$$||A_{2j-1}\bar{\varphi}_0||^2 = \int_{R^{2n}} \frac{\partial H}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial p_j}\left(\frac{1}{(2\pi\hbar)^{n/2}}\int_{R^n}\bar{\psi}(y)\chi(x-y)e^{\frac{i(x-y)p}{\hbar}}dy\right)\times$$
$$\times\frac{\partial H}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial p_j}\left(\frac{1}{(2\pi\hbar)^{n/2}}\int_{R^n}\bar{\psi}^*(y')\chi(x-y')e^{\frac{i(y'-x)p}{\hbar}}dy'\right)dxdp =$$
$$= \int_{R^{2n}}\frac{\partial H}{\partial x_j}\left(\frac{1}{(2\pi\hbar)^{n/2}}\int_{R^n}\bar{\psi}(y)\chi(x-y)\frac{i(x_j-y_j)}{\hbar}e^{\frac{i(x-y)p}{\hbar}}dy\right)\times$$
$$\times\frac{\partial H}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial p_j}\left(I_{int}\right)dxdp, \quad (95)$$

где I_{int} задается выражением (78). Подставим сюда вместо I_{int} его выражение в виде (80). После простых преобразований и подстановки производной функции $\tilde{\chi}$ в виде (56), получим:

$$||A_{2j-1}\bar{\varphi}_0||^2 = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3n/2}}\int_{R^{5n}}\frac{\partial H}{\partial x_j}\left(\bar{\psi}(y)\chi(x-y)\frac{i(x_j-y_j)}{\hbar}e^{\frac{i(x-y)p}{\hbar}}\right)\times$$
$$\times\bar{\psi}^*(y'')\frac{\partial H}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial p_j}\left(\tilde{\chi}(p-k)\right)e^{\frac{i(y''-x)k}{\hbar}}dk\ dy''dy\ dx\ dp =$$
$$= -\frac{ia}{b\hbar^2}\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3n/2}}\int_{R^{5n}}\left(\frac{\partial H}{\partial x_j}\right)^2\bar{\psi}(y)\bar{\psi}^*(y'')(x_j-y_j)\chi(x-y)\times$$
$$\times(p_j-k_j)\tilde{\chi}(p-k)e^{\frac{i(y''k-yp+xp-xk)}{\hbar}}dk\ dy''dy\ dx\ dp.$$

В полученном выражениии сделаем замену переменных: $\eta = x-y$ и $\xi = p-k$. Тогда, $x = y+\eta$, $p = k+\xi$ и

$$||A_{2j-1}\bar{\varphi}_0||^2 = -\frac{ia}{b\hbar^2}\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3n/2}}\int_{R^{5n}}\left(\frac{\partial H}{\partial x_j}\right)^2\bar{\psi}(y)\bar{\psi}^*(y'')\eta_j\chi(\eta)\times$$
$$\times\xi_j\tilde{\chi}(\xi)e^{\frac{i(y''-y)k}{\hbar}+\frac{i\eta\xi}{\hbar}}dk\ dy''dy\ d\eta\ d\xi,$$

где в функции $\left(\frac{\partial H}{\partial x_j}\right)^2$ вместо переменных x и p подставлены $y+\eta$ и $k+\xi$, соответственно.

Считая η и ξ малыми величинами, разложим функцию $\left(\frac{\partial H}{\partial x_j}\right)^2(y+\eta, k+\xi)$ в ряд Тейлора до нулевого члена. Имеем:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial x_j}\right)^2(y+\eta, k+\xi) = \left(\frac{\partial H}{\partial x_j}\right)^2(y,k) + O(\eta,\xi).$$

Подставим это выражение в предыдущее и проинтегрируем по η и ξ, используя интеграл (60) леммы 1. Окончательно получим:

$$||A_{2j-1}\bar{\varphi}_0||^2 = \frac{a}{2b\hbar}\frac{1}{(2\pi\hbar)^n}\int_{R^{3n}}\left(\left(\frac{\partial H}{\partial x_j}\right)^2 + o_\hbar(1)\right)\bar{\psi}(y)\bar{\psi}^*(y'')\times$$
$$\times e^{\frac{i(y''-y)k}{\hbar}}dk\ dy''dy. \quad (96)$$

2.2. Оценка $||P_0 A_{2j-1}\bar{\varphi}_0||^2$**.** По построению это выражение удовлетворяет неравнствам

$$0 \le ||P_0 A_{2j-1}\bar{\varphi}_0||^2 \le ||A_{2j-1}\bar{\varphi}_0||^2.$$

Отсюда и из соотношений (75) и (96) получим:

$$||A_{2j-1}\bar{\varphi}_0 - P_0 A_{2j-1}\bar{\varphi}_0||^2 = ||A_{2j-1}\bar{\varphi}_0||^2 - ||P_0 A_{2j-1}\bar{\varphi}_0||^2 \le ||A_{2j-1}\bar{\varphi}_0||^2 = \\ = \frac{a}{2b\hbar}\frac{1}{(2\pi\hbar)^n}\int_{R^{3n}}\left(\left(\frac{\partial H}{\partial x_j}\right)^2 + o_\hbar(1)\right)\times \\ \times\bar{\psi}(y)\bar{\psi}^*(y'')e^{\frac{i(y''-y)k}{\hbar}}dk\ dy''dy. \quad (97)$$

Последняя строка выражения (97) представляет собой плотность распределения $W'_{\bar{\psi}}$, заданную выражением (62). Применим к правой части равенства (97) лемму 4. Получим:

$$||A_{2j-1}\bar{\varphi}_0 - P_0 A_{2j-1}\bar{\varphi}_0||^2 = \frac{a}{2b\hbar}\left[\int_{R^{2n}}\left(\frac{\partial H}{\partial x_j}\right)^2 \rho_{\bar{\psi}}\ ddk + o_\hbar(1)\right], \quad (98)$$

где $\rho_{\bar{\psi}}(,k)$ — неотрицательная плотность распределения, заданная выражением (29) для функции $\bar{\psi}()$.

Введем константу C_{2j-1} следующим равенством:

$$C^2_{2j-1} \stackrel{def}{=} \frac{a}{2b}\max_{(x,p)\in U}\left(\frac{\partial H}{\partial x_j}\right)^2, \quad (99)$$

где максимум берется по физической области U значений координат и импульсов для данного процесса.

С учетом этого обозначения, из неравенства (98) следует, что

$$||A_{2j-1}\bar{\varphi}_0 - P_0 A_{2j-1}\bar{\varphi}_0||^2 \le \frac{1}{\hbar}\left(\int_{R^{2n}} C^2_{2j-1}\rho_{\bar{\psi}}\ dydk + o_\hbar(1)\right) = \\ = \left(C^2_{2j-1} + o_\hbar(1)\right)\frac{1}{\hbar}.$$

Последнее равенство, как и в первом случае, получено из условия нормированности плотности распределения вероятностей $\rho_{\bar{\psi}}$. Отсюда, извлекая корень квадратный из обеих частей последнего неравенства, окончательно получим:

$$||A_{2j-1}\bar{\varphi}_0 - P_0 A_{2j-1}\bar{\varphi}_0|| \le \left(C_{2j-1} + o_\hbar(1)\right)\frac{1}{\sqrt{\hbar}}. \quad (100)$$

Это завершает разбор случая 2.

3. Случай $A_{2j} = -\frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial}{\partial x_j}$**.** Оценим величину $||A_{2j}\bar{\varphi}_0 - P_0 A_{2j}\bar{\varphi}_0||$.

Если применить оператор $A_{2j} = -\frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial}{\partial x_j}$ к функции $\bar{\varphi}_0$ вида (24), то есть к функции:

$$\bar{\varphi}_0(x,p) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{n/2}}\int\limits_{R^n}\bar{\psi}(y)\chi(x-y)e^{i(x-y)p/\hbar}dy,$$

то, с учетом формулы (56) для производной функции χ, получим следующие равенства:

$$\begin{aligned}
A_{2j}\bar{\varphi}_0 &= -\frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial\bar{\varphi}_0}{\partial x_j} = -\frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{1}{(2\pi\hbar)^{n/2}}\int\limits_{R^n}\bar{\psi}(y)\times\\
&\quad\times\left(-\frac{b}{a\hbar}(x_j-y_j)+\frac{ip_j}{\hbar}\right)\chi(x-y)e^{i(x-y)p/\hbar}dy =\\
&= \frac{b}{a\hbar}\frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{1}{(2\pi\hbar)^{n/2}}\int\limits_{R^n}\bar{\psi}(y)(x_j-y_j)\chi(x-y)e^{i(x-y)p/\hbar}dy -\\
&\quad -\frac{ip_j}{\hbar}\frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{1}{(2\pi\hbar)^{n/2}}\int\limits_{R^n}\bar{\psi}(y)\chi(x-y)e^{i(x-y)p/\hbar}dy =\\
&= \frac{-ib}{a}\frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial\bar{\varphi}_0}{\partial p_j}+\frac{-ip_j}{\hbar}\frac{\partial H}{\partial p_j}\bar{\varphi}_0.
\end{aligned}$$

То есть $A_{2j}\bar{\varphi}_0 = A'_{2j}\bar{\varphi}_0 + A''_{2j}\bar{\varphi}_0$, где

$$A'_{2j}\bar{\varphi}_0 \stackrel{def}{=} -\frac{ib}{a}\frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial\bar{\varphi}_0}{\partial p_j}, \qquad A''_{2j}\bar{\varphi}_0 \stackrel{def}{=} -\frac{ip_j}{\hbar}\frac{\partial H}{\partial p_j}\bar{\varphi}_0.$$

Отсюда, используя свойство нормы о том, что норма суммы векторов не превышает суммы этих векторов, получим неравенство

$$||A_{2j}\bar{\varphi}_0 - P_0A_{2j}\bar{\varphi}_0|| \le ||A'_{2j}\bar{\varphi}_0 - P_0A'_{2j}\bar{\varphi}_0|| + ||A''_{2j}\bar{\varphi}_0 - P_0A''_{2j}\bar{\varphi}_0||. \quad (101)$$

Заметим, что оператор A'_{2j} совпадает с оператором A_{2j-1} (см. предыдущий случай), если в последнем заменить функцию $\frac{\partial H}{\partial x_j}$ на $\frac{-ib}{a}\frac{\partial H}{\partial p_j}$. Поэтому, используя формулы (100) и (99), получим:

$$||A'_{2j}\bar{\varphi}_0 - P_0A'_{2j}\bar{\varphi}_0|| \le \left(C'_{2j}+o_\hbar(1)\right)/\sqrt{\hbar}, \quad (102)$$
$$\text{где}\ \ (C'_{2j})^2 \stackrel{def}{=} \frac{b}{2a}\max_{(x,p)\in U}\left(\frac{\partial H}{\partial p_j}\right)^2.$$

С другой стороны, оператор A''_{2j} совпадает с оператором A_{2n+1} (см. случай 1), в котором $f(x,p) = p_j\frac{\partial H}{\partial p_j}$. Поэтому, используя формулы (94) и (92), получим:

$$||A''_{2j}\bar{\varphi}_0 - P_0A''_{2j}\bar{\varphi}_0|| \le \left(C''_{2j}+o_\hbar(1)\right)/\sqrt{\hbar}, \quad (103)$$

где

$$(C''_{2j})^2 \stackrel{def}{=} \max_{(x,p)\in U} \sum_{k=1}^{n} \left((f'_{x_k})^2 \frac{a}{2b} + (f'_{p_k})^2 \frac{b}{2a} \right) =$$

$$= \max_{(x,p)\in U} \sum_{k=1}^{n} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_k} \left(p_j \frac{\partial H}{\partial p_j} \right) \right)^2 \frac{a}{2b} + \left(\frac{\partial}{\partial p_k} \left(p_j \frac{\partial H}{\partial p_j} \right) \right)^2 \frac{b}{2a} \right].$$

Положим $C_{2j} \stackrel{def}{=} C'_{2j} + C''_{2j}$. Тогда, из неравенств (101), (102) и (103), с использованием введенного обозначения C_{2j}, окончательно получим:

$$||A_{2j}\bar{\varphi}_0 - P_0 A_{2j}\bar{\varphi}_0|| \le \frac{\left(C'_{2j} + o_\hbar(1)\right)}{\sqrt{\hbar}} + \frac{\left(C''_{2j} + o_\hbar(1)\right)}{\sqrt{\hbar}} = \left(C_{2j} + o_\hbar(1)\right) \frac{1}{\sqrt{\hbar}}. \quad (104)$$

Это завершает разбор случая 3.

Теперь мы готовы завершить доказательство утверждения 2.

Согласно утверждению 1, $\alpha_{max} \stackrel{def}{=} 2 \cdot \max_{\bar{\varphi}_0} ||A\bar{\varphi}_0 - P_0 A\bar{\varphi}_0||$. Поэтому, применив к неравенству (73) соотношения (94), (100) и (104), получим:

$$\alpha_{max} = 2 \cdot \max_{\bar{\varphi}_0} ||A\bar{\varphi}_0 - P_0 A\bar{\varphi}_0|| \le 2 \cdot \max_{\bar{\varphi}_0} \sum_{s=1}^{2n+1} ||A_s\bar{\varphi}_0 - P_0 A_s\bar{\varphi}_0|| =$$

$$= 2 \sum_{s=1}^{2n+1} \left(C_s + o_\hbar(1)\right) \frac{1}{\sqrt{\hbar}} = \left(C + o_\hbar(1)\right) \frac{1}{\sqrt{\hbar}},$$

где $C \stackrel{def}{=} 2 \sum_{s=1}^{2n+1} C_s$.

Что и требовалось доказать в утверждении 2.

Приложение 2

Доказательство теоремы 5

Для доказательства теоремы 5 рассмотрим формулу (33) теоремы 4 для случая, когда $H(x,p)=\frac{p^2}{2m}+V(x)$. Имеем,

$$\hat{H}\psi=\frac{1}{(2\pi\hbar)^n}\int\limits_{R^{3n}}\left(\frac{p^2}{2m}+V(x)-\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial V}{\partial x_k}+\frac{ib}{a}\frac{p_k}{m}\right)(x_k-y'_k)\right)\times$$
$$\times\chi(x-y)\chi(x-y')e^{\frac{i}{\hbar}(y-y')p}\psi(y',t)dy'dxdp. \tag{105}$$

Таким образом, в этом случае $\hat{H}\psi$ представляется в виде суммы трех интегралов $\hat{H}\psi=I_1+I_2+I_3$, где

$$I_1=\frac{1}{(2\pi\hbar)^n}\int\limits_{R^{3n}}\frac{p^2}{2m}\chi(x-y)\chi(x-y')e^{\frac{i}{\hbar}(y-y')p}\psi(y',t)dy'dxdp, \tag{106}$$

$$I_2=-\frac{1}{(2\pi\hbar)^n}\int\limits_{R^{3n}}\frac{ib}{am}\sum_{k=1}^{n}p_k(x_k-y'_k)\times$$
$$\times\chi(x-y)\chi(x-y')e^{\frac{i}{\hbar}(y-y')p}\psi(y',t)dy'dxdp, \tag{107}$$

$$I_3=\frac{1}{(2\pi\hbar)^n}\int\limits_{R^{3n}}\left(V(x)-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_k}(x_k-y'_k)\right)\times$$
$$\times\chi(x-y)\chi(x-y')e^{\frac{i}{\hbar}(y-y')p}\psi(y',t)dy'dxdp. \tag{108}$$

Заметим, что выражение $\int_{R^n}\chi(x-y)\chi(x-y')dx$, входящее в первый интеграл, преобразуется к виду:

$$\int\limits_{R^n}\chi(x-y)\chi(x-y')dx=\left(\frac{b}{a\pi\hbar}\right)^{n/2}\int\limits_{R^n}e^{-\frac{b(x-y)^2}{2a\hbar}}e^{-\frac{b(x-y')^2}{2a\hbar}}dx=$$
$$\left(\frac{b}{a\pi\hbar}\right)^{n/2}\int\limits_{R^n}e^{-\frac{b(x-(y+y')/2)^2}{a\hbar}}e^{-\frac{b(y-y')^2}{4a\hbar}}d\left(x-\frac{(y+y')}{2}\right)=e^{-\frac{b(y-y')^2}{4a\hbar}}. \tag{109}$$

Поэтому интеграл I_1 преобразуется к виду:

$$I_1=\frac{1}{(2\pi\hbar)^n}\int\limits_{R^{2n}}\frac{p^2}{2m}e^{-\frac{b(y-y')^2}{4a\hbar}}e^{\frac{i}{\hbar}(y-y')p}\psi(y',t)dy'dp. \tag{110}$$

Как известно из формул преобразований Фурье, для любой гладкой функции $f(y')$ верно равенство

$$f(y)=\frac{1}{(2\pi\hbar)^n}\int\limits_{R^{2n}}e^{\frac{i}{\hbar}(y-y')p}f(y')dy'dp. \tag{111}$$

Далее это равенство будет часто использоваться.

В частности, верно равенство

$$\psi(y,t)=\frac{1}{(2\pi\hbar)^n}\int\limits_{R^{2n}} e^{-\frac{b(y-y')^2}{4a\hbar}}e^{\frac{i}{\hbar}(y-y')p}\psi(y',t)dy'dp. \tag{112}$$

Продифференцируем обе части последнего равенства по y_k, получим с учетом соотношения (111):

$$\begin{aligned}\frac{\partial\psi(y,t)}{\partial y_k}&=\frac{1}{(2\pi\hbar)^n}\int\limits_{R^{2n}}\left(\frac{ip_k}{\hbar}-\frac{b(y_k-y'_k)}{2a\hbar}\right)e^{-\frac{b(y-y')^2}{4a\hbar}}e^{\frac{i}{\hbar}(y-y')p}\psi(y',t)dy'dp=\\&=\frac{1}{(2\pi\hbar)^n}\int\limits_{R^{2n}}\frac{ip_k}{\hbar}e^{-\frac{b(y-y')^2}{4a\hbar}}e^{\frac{i}{\hbar}(y-y')p}\psi(y',t)dy'dp.\end{aligned} \tag{113}$$

Если обе части полученного равенства еще раз продифференцировать по y_k, то получим равенство

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\psi(y,t)}{\partial y_k^2}&=\frac{1}{(2\pi\hbar)^n}\int\limits_{R^{2n}}\frac{ip_k}{\hbar}\left(\frac{ip_k}{\hbar}-\frac{b(y_k-y'_k)}{2a\hbar}\right)\times\\&\times e^{-\frac{b(y-y')^2}{4a\hbar}}e^{\frac{i}{\hbar}(y-y')p}\psi(y',t)dy'dp=-\frac{2m}{\hbar^2}I_1^k-I_4^k,\end{aligned} \tag{114}$$

где

$$I_1^k=\frac{1}{(2\pi\hbar)^n}\int\limits_{R^{2n}}\frac{p_k^2}{2m}e^{-\frac{b(y-y')^2}{4a\hbar}}e^{\frac{i}{\hbar}(y-y')p}\psi(y',t)dy'dp \tag{115}$$

и

$$I_4^k=\frac{1}{(2\pi\hbar)^n}\int\limits_{R^{2n}}\frac{ip_k}{\hbar}\frac{b(y_k-y'_k)}{2a\hbar}e^{-\frac{b(y-y')^2}{4a\hbar}}e^{\frac{i}{\hbar}(y-y')p}\psi(y',t)dy'dp. \tag{116}$$

Для вычисления интегралов I_4^k рассмотрим, как частный случай равенства (111), равенство

$$0=\frac{1}{(2\pi\hbar)^n}\int\limits_{R^{2n}}\frac{b(y_k-y'_k)}{2a\hbar}e^{-\frac{b(y-y')^2}{4a\hbar}}e^{\frac{i}{\hbar}(y-y')p}\psi(y',t)dy'dp. \tag{117}$$

Продифференцируем обе части этого равенства по y_k. Получим:

$$\begin{aligned}0&=\frac{1}{(2\pi\hbar)^n}\int\limits_{R^{2n}}\left(\frac{b}{2a\hbar}+\frac{b(y_k-y'_k)}{2a\hbar}\left(\frac{ip_k}{\hbar}-\frac{b(y_k-y'_k)}{2a\hbar}\right)\right)\times\\&\times e^{-\frac{b(y-y')^2}{4a\hbar}}e^{\frac{i}{\hbar}(y-y')p}\psi(y',t)dy'dp.\end{aligned} \tag{118}$$

Отсюда, с учетом обозначения (116) для интеграла I_4^k и соотношения (111), получим равенства

$$0 = \frac{b}{2a\hbar}\psi(y,t) + I_4^k \quad \text{или} \quad I_4^k = -\frac{b}{2a\hbar}\psi(y,t). \tag{119}$$

Подставив это равенство в соотношение (114), получим

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial y_k^2} = -\frac{2m}{\hbar^2}I_1^k + \frac{b}{2a\hbar}\psi(y,t).$$

Из этого равенства выражаем I_1^k:

$$I_1^k = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial y_k^2} + \frac{b\hbar}{4ma}\psi(y,t).$$

Просуммировав полученное равенство по k от 1 до n, получим выражение для интеграла I_1:

$$I_1 = \sum_{k=1}^{n} I_1^k = -\sum_{k=1}^{n}\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial y_k^2} + \frac{nb\hbar}{4ma}\psi(y,t). \tag{120}$$

Перейдем к вычислению интеграла I_2, заданного выражением (107).

Рассмотрим равенство (109) вида

$$\int\limits_{R^n}\chi(x-y)\chi(x-y')dx = e^{-\frac{b(y-y')^2}{4a\hbar}}, \quad \text{где} \quad \chi(x-y') = \left(\frac{b}{a\pi\hbar}\right)^{n/4} e^{-b(x-y')^2/(2a\hbar)}.$$

Продифференцируем обе части этого равенства по y'_k. Получим:

$$\int\limits_{R^n}\frac{b(x_k-y'_k)}{a\hbar}\chi(x-y)\chi(x-y')dx = \frac{b(y_k-y'_k)}{2a\hbar}e^{-\frac{b(y-y')^2}{4a\hbar}}$$

или, после сокращения общих множителей,

$$\int\limits_{R^n}(x_k-y'_k)\chi(x-y)\chi(x-y')dx = \frac{y_k-y'_k}{2}e^{-\frac{b(y-y')^2}{4a\hbar}}.$$

Подставив это равенство в выражение (107) для интеграла I_2, получим

$$I_2 = -\frac{1}{(2\pi\hbar)^n}\int\limits_{R^{2n}}\frac{ib}{2am}\sum_{k=1}^{n}p_k(y_k-y'_k)e^{-\frac{b(y-y')^2}{4a\hbar}}e^{\frac{i}{\hbar}(y-y')p}\psi(y',t)dy'dp.$$

Сравнивая последнее выражение с выражением (116) для интегралов I_4^k, получим $I_2 = -\hbar^2/m\sum_{k=1}^{n}I_4^k$. Подставив сюда вычисленные выражения (119) для интегралов I_4^k, окончательно получим

$$I_2 = \frac{nb\hbar}{2ma}\psi(y,t). \tag{121}$$

Рассмотрим теперь интеграл I_3, заданный выражением (108). В соответствии с формулой (111), этот интеграл приводится к виду

$$I_3 = \psi(y,t) \int\limits_{R^n} \left(V(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_k}(x_k - y_k) \right) \chi^2(x-y)dx,$$

где $\chi^2(x-y) = (b/(a\pi\hbar))^{n/2} exp(-b(x-y)^2/(a\hbar))$ — плотность нормального распределения, или, после замены переменных $x'_k = x_k - y_k$, к виду

$$I_3 = \psi(y,t) \int\limits_{R^n} \left(V(y+x') - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V(y+x')}{\partial y_k} x'_k \right) \chi^2(x')dx'.$$

Если предыдущие интегралы были вычислены точно, то этот интеграл будем вычислять приближенно, считая дисперсию $a\hbar/2b$ нормального распределения $\chi^2(x')$ малой величиной, разложив в точке y в ряд Тейлора по x' функцию $V(y+x')$ до второго члена и $\partial V(y+x')/\partial y_k$ до первого члена. Имеем:

$$I_3 \approx \psi(y,t) \int\limits_{R^n} \left(V(y) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V(y)}{\partial y_k} x'_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \sum_{k'=1}^{n} \frac{\partial^2 V(y)}{\partial y_k \partial y_{k'}} x'_k x'_{k'} \right) \chi^2(x')dx' -$$
$$-\psi(y,t) \int\limits_{R^n} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V(y)}{\partial y_k} x'_k + \sum_{k=1}^{n} \sum_{k'=1}^{n} \frac{\partial^2 V(y)}{\partial y_k \partial y_{k'}} x'_k x'_{k'} \right) \chi^2(x')dx'.$$

Отсюда, так как для плотности нормального распределения $\chi^2(x')$ верны соотношения: $\int_{R^n} \chi^2(x')dx' = 1$, $\int_{R^n} x'_k \chi^2(x')dx' = 0$, $\int_{R^n} x'_k x'_{k'} \chi^2(x')dx' = 0$ при $k \neq k'$ и $\int_{R^n} x'_k x'_k \chi^2(x')dx' = a\hbar/(2b)$, окончательно получаем:

$$I_3 \approx \psi(y,t)V(y) - \psi(y,t)\frac{a\hbar}{4b} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 V(y)}{\partial y_k^2}. \tag{122}$$

Итак, так как $\hat{H}\psi = I_1 + I_2 + I_3$, где интегралы I_1, I_2, I_3 задаются выражениями (106), (107), (108), соответственно, то подставив сюда их вычисленные значения в виде выражений (120), (121), (122) и приведя подобные члены, получим выражение для $\hat{H}$, требуемое в теореме 5:

$$\hat{H} \approx -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial y_k^2} \right) + V(y) - \frac{a\hbar}{4b} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 V}{\partial y_k^2} + \frac{3nb\hbar}{4ma}.$$

Приложение 3

Оценка параметров модели

1. Оценка параметра модели a/b

Отличие оператора $\hat{H}$, заданного выражением (36) теоремы 5, от стандартного оператора Гамильтона в уравнении Шредингера может вызвать разницу в спектрах операторов энергии (в частности, для функции потенциальной энергии атома водорода) для рассматриваемой модели и для стандартной модели квантовой механики. Разница между этими операторами в третьем слагаемом с множителем $a\hbar/4b$. Если считать, что поведение частиц более точно описывается уравнением Шредингера с оператором $\hat{H}$ вида (36), чем с оператором Гамильтона, то эксперименты должны были бы показать неточность спектров, вычисленных на основе операторов Гамильтона, то есть неточность нерелятивистской квантовой механики.

Несоответствие теоретических и экспериментальных данных в нерелятивистской квантовой механике хорошо известно. Оно было обнаружено в 40-х годах в [10] и получило название лэмбовского смещения уровней атома водорода. Впоследствии, этот эффект был объяснен в квантовой электродинамике взаимодействием электрона с флуктуирующим электромагнитным полем (см., например, [16], стр. 593, где имеются ссылки на первоисточники).

Если считать, что данные в эксперименте Лэмба связаны с возмущающим слагаемым в операторе $\hat{H}$, то эти данные позволяют оценить величину $a\hbar/4b$.

В этом разделе вычисления оценки величины $a\hbar/4b$ были проделаны, следуя вычислениям, приведенным в [18] для обоснования величины сдвига Лэмба в спектре атома водорода.

Пусть

$$V(y) = -\frac{e^2}{r} = -\frac{e^2}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}}$$

функция потенциала атома водорода, и $\hat{H} = \hat{E} + \hat{V}$ — оператор теоремы 5, где

$$\hat{E} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial y_k^2}\right) \quad \text{и} \quad \hat{V}(y) = V(y) - \frac{a\hbar}{4b}\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial^2 V}{\partial y_k^2}.$$

Рассмотрим оператор $\hat{H}$ как возмущение оператора Гамильтона $\tilde{H} = \hat{E} + V$ атома водорода. Оценим собственные значения оператора $\hat{H}$.

Из стандартной теории возмущений следует, что в первом приближении поправка δE_n к собственному значению E_n оператора Гамильтона имеет вид:

$$\delta E_n = \int_{R^3} \rho_n(y)(hatV(y) - V(y))dy,$$

где $\rho_n(y) = |\psi_n(y)|^2$ и $\psi_n(y)$ - собственная функция оператора Гамильтона с собственным значением E_n.

Подставив выражение для $(\hat{V}(y)$ в выражение для δE_n, получим:

$$\delta E_n = -\frac{a\hbar}{4b} \int_{R^3} \rho_n(y) \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial^2 V(y)}{\partial y_k^2} dy.$$

Так как интеграл от оператора Лапласа функции $V(y) = -e^2/r$ равен $4\pi e^2 \delta_0(y)$, где $4\pi e^2 \delta_0(y)$ — дельта функция в нуле, то отсюда следует, что

$$\delta E_n = -\frac{a\hbar\pi e^2}{b} \rho_n(0).$$

Для атома водорода известно (см., например [20], стр. 342), что

$$\rho_n(0) = |\psi_n(0)|^2 = \frac{1}{\pi n^3} \left(\frac{me^2}{\hbar^2}\right)^3.$$

Поэтому

$$\delta E_n = -\frac{a\hbar\pi e^2}{b} \frac{1}{\pi n^3} \left(\frac{me^2}{\hbar^2}\right)^3 = -\frac{a}{b} \frac{m^3 e^8}{n^3 \hbar^5} = -\frac{a}{b} \frac{m^3 \alpha^4 c^4}{n^3 \hbar},$$

где $\alpha = e^2/(\hbar c) = 1/137$ – постоянная тонкой структуры, c – скорость света. Отсюда, a/b выражается следующим образом:

$$\frac{a}{b} = |\delta E_n| \frac{n^3 \hbar}{m^3 \alpha^4 c^4}.$$

В экспериментах Лэмба и Резерфорда для атома водорода было установлено, что $\delta E_2 = 1058 = 1058 \cdot 10^6 h$ эрг, где $h = 2\pi\hbar$. Сравнивая это значение с полученным выражением δE_2, простыми вычислениями получим оценку величины $a/b = 3,41 \cdot 10^4/$. Отсюда стандартное отклонение для плотности нормального распределения вероятностей $\chi_1^2(x')$, по которому производится сглаживание потенциала V, равно $\sqrt{a\hbar/2b} = 4,24 \cdot 10^{-12}$. Эта величина существенно меньше радиуса атома водорода.

2. Оценка коэффициентов диффузии и времени переходного процесса

В этом разделе будем предполагать, что диффузионные коэффициенты a и b определяются стандартным тепловым воздействием окружающей среды на движущейся электрон. Можно считать, что на броуновскую частицу (электрон) воздействует флуктуирующая сила, приложенная со стороны окружающей среды, а также стохастическое сопротивление, пропорциональное скорости частицы. Для моделирования движения в этой ситуации обычно (см., например [17], стр.196) используется уравнение Ланжевена

$$\dot{p} = -\gamma p + F(t),$$

где γ— коэффициент трения для единичной массы, а $F(t)$ — представляет флуктуирующую силу, которая считается не зависящей от скорости, со средним значением, равным нулю.

Этому уравнению эквивалентно (см. [17], стр.212) уравнение Фоккера – Планка для плотности распределения вероятностей $f(p, q, t)$ в фазовом пространстве в его стандартной форме:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{p_i}{m}\frac{\partial f}{\partial x_i} = \gamma \frac{\partial (f p_i)}{\partial p_i} + \gamma k T m \frac{\partial^2 f}{\partial p_i^2},$$

где m— масса частицы (в данном случае электрона $m = 9.10939 \cdot 10^{-31}$), k — постоянная Больцмана ($k = 1.38066 \cdot 10^{-23}/K$), T — температура среды.

Решение этих уравнений для интервалов времени t, существенно больших, чем γ^{-1}, как хорошо известно (см. [21], стр.215), приводит к диффузионному процессу по координатам x с коэффициентом диффузии $kT/(m\gamma)$. Это соотношение известно также под названием соотношения Эйнштейна для коэффициента диффузии ([17], стр.198).

Таким образом, при этих предположениях можно считать, что коэффициент диффузии по координатам $a^2 = kT/(m\gamma)$, а коэффициент диффузии по импульсам (как в уравнении Фоккера – Планка) $b^2 = \gamma k T m$.

Отсюда, $a/b = (\gamma m)^{-1}$ и $ab = kT$.

По полученной в предыдущем разделе оценке, имеем:

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{\gamma m} = 3.41 \cdot 10^7/,$$

и величина

$$\gamma = \frac{1}{3.41 \cdot 10^7 \cdot m} = \frac{1}{3.41 \cdot 10^7 \cdot 9.10939 \cdot 10^{-31}} = 3.22 \cdot 10^{22-1}.$$

С другой стороны, время переходного процесса к процессу, описываемому уравнением Шредингера, по теореме 4 выражается величиной $\hbar/(ab) = \hbar/(kT)$. Это время при $T = 1^\circ K$ равно $7.638 \cdot 10^{-12}$.

При этой же температуре коэффициенты диффузии оцениваются следующим образом:

$$a^2 = kT/(m\gamma) = 4.708 \cdot 10^{-16}\text{м}^2 \cdot \text{сек}^{-1};$$

$$b^2 = \gamma kTm = 4.049 \cdot 10^{-31}(\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{сек}^{-1})^2 \cdot \text{сек}^{-1}.$$

Список литературы

1. *Бениаминов Е.М. Диффузионные процессы в фазовых пространствах и квантовая механика* // Доклады академии наук. 2007. Т. 416. № 1. С. 31-35.
2. *Бениаминов Е.М. Квантование как приближенное описание некоторого диффузионного процесса* // В трудах Международной конференции "Идемпотентная и тропическая математика и проблемы математической физики" , Москва, август 2007, Т.2, с.78-84.
3. *Wigner E. On the Quantum Correction For Thermodynamic Equilibrium* // Phys. Rev. 1932. V. 40. P. 749-759.
4. *Bohm D., Vigier J.P. Model of the Causal Interpretation of Quantum Theory in Terms of a Fluid with Irregular Fluctuations* // Phys. Rev. 1954. V. 96. P. 208-216.
5. *Nelson E. Derivation of the Schredinger Equation from Newtonian Mechanics,* // Phys. Rev. 1966. V. 150. P. 1079-1085.
6. *De la Pena-Auerbach L., Cetto A.M. Derivation of quantum mechanics from stochastic electrodynamics* // J. Math. Phys. 1977. V. 18. P. 1612-1622.
7. *Baublitz M. Derivation of the Schredinger Equation from a Stochastic Theory* // Prog. Theor. Phys. V. 80. P. 232-244.
8. *Маслов В.П.* Уравнения Колмогорова–Феллера и вероятностная модель квантовой механики // Итоги науки и техники. Теор. вер., мат. стат. и кибернет. 1982. Т. 19. С. 55-85.
9. *Маслов В.П* Квантование термодинамики и ультравторичное квантование. М.: Институт компьютерных исследований, 2001. 384 с.
10. *Lamb W.E., Retherford R.C. Fine Structure of the Hydrogen Atom by a Microwave Method* // Phys. Rev. 1947. V. 72. P. 241-243.
11. *Фейнман Р., А. Хибс А.* Квантовая механика и интеграл по траекториям. М.: Мир, 1968. 384 с.
12. *Маслов В.П.* Комплексные марковские цепи и континуальный интеграл Фейнмана. М.: Наука, 1976. 192 с.
13. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.*,Квантовая механика (нерелятивистская теория). Теоретическая физика, т. 3, М.:Наука, 1989.
14. *Система символьных математических вычислений Mathematica.* http://www.wolfram.com/
15. *Beniaminov E.M. A Method for Justification of the View of Observables in Quantum Mechanics and Probability Distributions in Phase Space* http://arxiv.org/abs/quant-ph/0106112. 2001.
16. *Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.* Квантовая электродинамика. Теоретическая физика. Т. 4. М.: Наука, 1980. 704 с.
17. *Исихара А.* Статистическая физика. М.: Мир, 1973. 472 с.
18. *Welton T.A. Some Observable Effects of The Quantum-Mechanical Fluctuations of the Electromagnetic Field* // Phys. Rev. 1948. V. 74. P. 1157-1167.
19. *Дыхне А.М., Юдин Г.Л.* Внезапные возмущения и квантовая эволюция. М.: Редакция журнала "Успехи физических наук" , 1996. 428 с.
20. *Соколов А.А., Тернов И.М., Жуковский В.Ч.* Квантовая механика. Из-во "Наука" , 1979.

21. *Ван Кампен Н.Г.* Стохастические процессы в физике и химии. Из-во "Высшая школа" , Москва, 1990.

Е. М. Бениаминов

Российский государственный гуманитарный университет, Москва, Россия

E-mail: ebeniamin@yandex.ru

Proc. Intern. Geom. Center 2009 **2**(4) 51–56 $d\omega$

О группе автоморфизмов структуры Римана-Картана

М.А. Марко, В.И. Паньженский

Представлено А.Г. Кушнером

Аннотация Доказано, что размерность группы Ли автоморфизмов структуры Римана-Картана n-мерного ($n \neq 3$) многообразия меньше $\frac{n(n+1)}{2}$. Если $n = 3$, то максимальная размерность этой группы равна 6.

Ключевые слова Структура Римана-Картана · Автоморфизмы · Группы Ли · Производная Ли

УДК 514.76

1. Пусть M — гладкое n-мерное ($n \geq 2$) многообразие, g — риманова метрика на M, $\tilde{\nabla}$ — метрическая связность с кручением. Метрика g и связность $\tilde{\nabla}$ задают на M структуру Римана-Картана (PK).

Диффеоморфизм $\varphi : M \longrightarrow M$ называется автоморфизмом структуры PK, если он оставляет инвариантным g и $\tilde{\nabla}$. Так как $\tilde{\nabla} = \nabla + T$, где T — тензор деформации связности Леви - Чивита ∇ метрики g и ∇ инвариантна относительно φ, то связность $\tilde{\nabla}$ является инвариантной тогда и только тогда, когда является инвариантным тензор деформации T. Таким образом множество всех автоморфизмов структуры PK является подгруппой Ли группы Ли изометрий риманова многообразия (M, g), оставляющей инвариантным тензорное поле T, и имеет размерность $r \leq \frac{n(n+1)}{2}$. Справедлива следующая

Теорема 1 *Размерность группы Ли автоморфизмов структуры Римана-Картана n-мерного, $n \neq 3$ многообразия меньше $\frac{n(n+1)}{2}$.*

Доказательство. Пусть $\varphi_t = exp\ tX$ — произвольная однопараметрическая подгруппа группы автоморфизмов G^r структуры PK. Тогда

$$\mathcal{L}_X g = 0, \mathcal{L}_X T = 0$$

где $\mathcal{L}_X$ - производная Ли вдоль векторного поля X, принадлежащего алгебре Ли g^r группы Ли G^r.

В локальных координатах (x^i) многообразия M эти уравнения примут вид

$$\xi^p \partial_p g_{ij} + \partial_i \xi^p g_{pj} + \partial_j \xi^p g_{ip} = 0 \tag{1}$$

и

$$\xi^p \partial_p T_{ijk} + \partial_i \xi^p T_{pjk} + \partial_j \xi^p T_{ipk} + \partial_k \xi^p T_{ijp} = 0, \tag{2}$$

где ξ^p — координаты векторного поля X, g_{ij} - компоненты метрического тензора, $T_{ijk} = T^p_{ij} g_{kp}$ — ковариантные компоненты тензора деформации T. Заменяя частные производные в (1) и (2) ковариантными производными связности Леви-Чивита ∇, получим

$$\xi_{ij} + \xi_{ji} = 0 \tag{3}$$

и

$$\xi^p \nabla_p T_{ijk} + \nabla_i \xi^p T_{pjk} + \nabla_j \xi^p T_{ipk} + \nabla_k \xi^p T_{ijp} = 0, \tag{4}$$

где $\xi_{ij} = \xi^p_i g_{jp}, \xi^j_i = \nabla_i \xi^j$. Заметим, что уравнения (3) есть уравнения Киллинга риманова многообразия (M, g). Уравнения (4) запишем в следующем виде

$$\xi^p \nabla_p T_{ijk} + \xi_{rq}\{\delta^r_i g^{qp} T_{pjk} + \delta^r_j g^{qp} T_{ipk} + \delta^r_k g^{qp} T_{ijp}\} = 0, \tag{5}$$

где δ^j_i — символ Кронекера, g^{ij} — контравариантные компоненты метрического тензора g: $g_{ip} g^{pj} = \delta^j_i$.

Предположим теперь, что группа автоморфизмов структуры PK равна $r = \frac{n(n+1)}{2}$ и докажем, что тогда $T_{ijk} = 0$, если $n \neq 3$.

Действительно, в этом случае алгебраические относительно ξ^p и ξ_{rq} уравнения (5) не должны накладывать других условий, отличных от (3), т.е. должны выполняться при любых ξ^p и ξ_{rq}, удовлетворяющих условиям (3). Поэтому мы должны иметь следующие тождества

$$\nabla_p T_{ijk} = 0 \tag{6}$$

и

$$\delta_i^r g^{qp} T_{pjk} + \delta_j^r g^{qp} T_{ipk} + \delta_k^r g^{qp} T_{ijp} - \delta_i^q g^{rp} T_{pjk} - \delta_j^q g^{rp} T_{ipk} - \delta_k^q g^{rp} T_{ijp} = 0 \quad (7)$$

Умножая (7) на $g_{lr} g_{mq}$ и учитывая косую симметрию T_{ijk} по последним двум индексам: $T_{ijk} + T_{ikj} = 0$ (так как связность $\tilde{\nabla}$ метрическая:$\tilde{\nabla}_i g_{jk} = 0$ см., например, [1]), получим равносильные (7) соотношения

$$g_{il} T_{mjk} - g_{jl} T_{ikm} + g_{kl} T_{ijm} - g_{im} T_{ljk} + g_{jm} T_{ikl} - g_{km} T_{ijl} = 0. \quad (8)$$

Перепишем (8) умножив на $g^{ql} g^{rm}$:

$$\delta_i^q T^r{}_{jk} - \delta_j^q T_{ik}{}^r + \delta_k^q T_{ij}{}^r - \delta_i^r T^q{}_{jk} + \delta_j^r T_{ik}{}^q - \delta_k^r T_{ij}{}^q = 0, \quad (9)$$

где $T^r{}_{jk} = T_{sjk} g^{sr}, T_{ik}{}^r = T_{iks} g^{sr}$. В (9) свернем индексы q и i. В результате получим

$$(n-1) T^r{}_{jk} - T_{jk}{}^r + T_{kj}{}^r + \delta_j^r T_{*k}{}^* - \delta_k^r T_{*j}{}^* = 0, \quad (10)$$

где $T_{*k}{}^* = T_{sk}{}^s$. Умножив (10) на g_{ir}, будем иметь

$$(n-1) T_{ijk} - T_{jki} + T_{kji} + g_{ji} T_{*k}{}^* - g_{ki} T_{*j}{}^* = 0. \quad (11)$$

Циклируя в (11) индексы i, j, k получим еще два равенства

$$(n-1) T_{jki} - T_{kij} + T_{ikj} + g_{kj} T_{*i}{}^* - g_{ij} T_{*k}{}^* = 0 \quad (12)$$

$$(n-1) T_{kij} - T_{ijk} + T_{jik} + g_{ik} T_{*j}{}^* - g_{jk} T_{*i}{}^* = 0 \quad (13)$$

Складывая (11), (12) и (13) и учитывая косую симметрию тензора деформации по последним двум индексам, получим

$$(n-3)(T_{ijk} + T_{jki} + T_{kij}) = 0, \quad (14)$$

откуда для $n \neq 3$, следует

$$T_{ijk} + T_{jki} + T_{kij} = 0 \quad (15)$$

Учитывая (15) равенства (11) примут вид:

$$n T_{ijk} + g_{ji} T_{*k}{}^* - g_{ki} T_{*j}{}^* = 0 \quad (16)$$

Умножая (16) на g^{kl}, получим

$$n T_{ij}^l + g_{ji} g^{kl} T_{*k}{}^* - \delta_i^l T_{*j}{}^* = 0 \quad (17)$$

В (17) свернем индексы l и i. В результате будем иметь:

$$n T_{*j}{}^* + T_{*j}{}^* - n T_{*j}{}^* = 0, \quad (18)$$

откуда

$$T_{*j}{}^{*} = 0. \tag{19}$$

Теперь (11) примет вид:

$$(n-1)T_{ijk} - T_{jki} + T_{kji} = 0 \tag{20}$$

или,учитывая опять (15), получим

$$nT_{ijk} = 0, \tag{21}$$

т.е $T_{ijk} = 0$. Теорема доказана.

Замечание 1 *Очевидно, что эта теорема справедлива и в случае когда g является псевдоримановой метрикой.*

2. Если $n = 3$, то справедлива

Теорема 2 *Максимальная размерность группы Ли автоморфизмов структуры Римана-Картана трехмерного многообразия равна* $6 = \frac{n(n+1)}{2}$.

Доказательство. Рассмотрим трехмерное риманово многообразие постоянной секционной кривизны k. Хорошо известно группа изометрий таких многообразий максимальна, т.е. ее размерность равна $6 = \frac{n(n+1)}{2}$ [2]. Необходимо доказать, что существует тензор деформации, инвариантный относительно этой группы. Действительно, в некоторой окрестности каждой точки существует система координат в которой метрический тензор имеет вид [2]

$$g = \frac{dx^1 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^2 + dx^3 \otimes dx^3}{[1 + \frac{k}{4}(x^{1^2} + x^{2^2} + x^{3^2})]^2} \tag{22}.$$

Нетрудно проверить, что *для метрики (22) условия (8) выполняется тождественно тогда и только тогда, когда T_{ijk} кососимметричен по всем индексам.*

Учитывая этот факт и имея базисные векторные поля алгебры Ли g^6 группы изометрий G^6 трехмерного риманова многообразия постоянной секционной кривизны, интегрируя уравнения (2), находим тензор деформации, инвариантный относительно G^6 (см. подробнее [3])

$$T = \frac{c_{ijk} dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k}{[1 + \frac{k}{4}(x^{1^2} + x^{2^2} + x^{3^2})]^3}, \tag{23}$$

где c_{ijk} — постоянные, из которых, в силу косой симметрии существенной является лишь одна. Теорема доказана.

Замечание 2 *Если тензор деформации кососимметричен по всем индексам, то* $T_{ij}{}^{k} = \frac{1}{2}S_{ij}{}^{k}$, *где* $S_{ij}{}^{k} = \tilde{\Gamma}_{ij}{}^{k} - \tilde{\Gamma}_{ji}{}^{k}$ *- тензор кручения связности* $\tilde{\nabla}$. *Такие связности составляют I класс в классификации С.Е.Степанова связностей с кручением (см., например, [4]). Именно этому классу принадлежит связность* $\tilde{\nabla}$ *с тензором деформации (23). Отметим так же, что этот тензор ковариантно постоянен, как в связности* ∇, *так и в связности* $\tilde{\nabla}$. *Для псевдоримановой метрики трехмерного пространства постоянной кривизны*

$$g = \frac{\varepsilon_1 dx^1 \otimes dx^1 + \varepsilon_2 dx^2 \otimes dx^2 + \varepsilon_3 dx^3 \otimes dx^3}{\left[1 + \frac{k}{4}(\varepsilon_1 {x^1}^2 + \varepsilon_2 {x^2}^2 + \varepsilon_3 {x^3}^2)\right]^2}, \tag{24}$$

тензор деформации, инвариантный относительно G^6 *имеет вид*

$$T = \frac{c_{ijk} dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k}{\left[1 + \frac{k}{4}(\varepsilon_1 {x^1}^2 + \varepsilon_2 {x^2}^2 + \varepsilon_3 {x^3}^2)\right]^3}, \tag{25}$$

где $\varepsilon_i = \pm 1$.

3. Пусть (M, g) — трехмерное многообразие Римана-Картана I класса классификации С.Е. Степанова, т.е. компоненты T_{ijk} тензора деформации кососимметричен по всем индексам и, следовательно, $T_{ijk} = \frac{1}{2}S_{ijk}$. Обозначим через $\Omega = S_{123} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ - фундаментальную форму кручения, а $\Omega_0 = \sqrt{g} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$, $g = \det \|g_{ij}\|$ — форму объема. Пусть D — относительно компактная область. Тогда определены интегралы

$$\upsilon = \int\limits_D \Omega, \upsilon_0 = \int\limits_D \Omega_0.$$

В работах [3] и [5] определены понятия объемного кручения, как отношение $\frac{\upsilon}{\upsilon_0} = v_k$ и скалярного кручение как отношение $\frac{S_{123}}{\sqrt{g}} = s_k$ плотностей. Объемное кручение является функционалом, заданном на множестве всех областей интегрирования, а скалярное кручение есть функция точки. Связь введенных таким образом, инвариантов устанавливает следующее утверждение

Теорема 3 *Если область интегрирования* D *стягивать в точку* $x_0 \in D$ *то в пределе объемное кручение совпадает со скалярным кручением в точке* x_0.

Доказательство. Действительно, по теореме о среднем имеем

$$v = \int\limits_D \frac{S_{123}}{\sqrt{g}} \cdot \sqrt{g} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = \int\limits_D s_k(x) \cdot \Omega_0 = s_k(x^*) v_0,$$

где x^* - некоторая точка области D.

Поэтому $v_k = \frac{v}{v_0} = s_k(x^*)$ и

$$\lim_{D \longrightarrow x_0} v_k = \lim_{x^* \longrightarrow x_0} s_k(x^*) = s_k(x_0),$$

что и требовалось доказать.

Список литературы

1. Яно К., Бохнер С. Кривизна и числа Бетти/ М.– 1957.
2. Эйзенхарт Л.П. Риманова геометрия/ М. – 1948.
3. Паньженский В.И. Римановы пространства постоянной кривизны с кручением/ Сб. трудов института математики НАН Украины 2009, Т.6, №2, с. 183-194.
4. Степанов С.Е., Гордеева И.А. Псевдокиллинговы и псевдогармонические векторные поля на многообразии Римана-Картана/ Мат. заметки. М.: Наука, Т.87, в. 2, 2010, с. 267-279.
5. Паньженский В.И. Максимально подвижные римановы пространства с кручением/ Мат. заметки. М.: Наука, Т.85, в. 5, 2009, с. 754-757.

М. А. Марко

Пензенский государственный педагогический университет им. В. Г. Белинского, Пенза, Россия

E-mail: geometry@spu-penza.ru

В. И. Паньженский

Пензенский государственный педагогический университет им. В. Г. Белинского, Пенза, Россия

E-mail: geometry@spu-penza.ru

Proc. Intern. Geom. Center 2009 **2**(4) 57–68 $d\omega$

Срединно-усеченные симплексы в аффинных пространствах произвольной размерности

Ю. С. Резникова

Представлено А.Д. Милкой

Аннотация Рассмотрен тип выпуклых многогранников, введенных автором в статье [Резникова Ю.С.: Срединно-усеченные симплексы в аффинных пространствах произвольной мерности. Наук. часопис НПУ ім. М. П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки, **6**, 235–242 (2005)]. Представлено новое доказательство теоремы о внутренней геометрической структуре указанных многогранников методом математической индукции. Сформулированы и доказаны дополнительные следствия о степенях вершин многомерных срединно-усеченных симплексов, а также о дуальных многогранниках.

Ключевые слова Конструктивный геометрический объект · Многомерный аналог октаэдра · Срединно-усеченный симплекс · Характеристики Эйлера-Пуанкаре

УДК 514.142

В процессе исследований, посвященных аналитико-геометрическому описанию некоторых типов конструктивных фрактальных симплекс-множеств[1] в аффинных пространствах размерности четыре и выше, было обнаружено существование многомерного аналога октаэдра [3,4] как

[1] Конструктивные фрактальные симплекс-множества в аффинных пространствах произвольной размерности представляют собой конструктивные фракталы, в качестве изначального множества построения которых выступает многомерный симплекс.

конструктивного объекта [2], который оказался отличным от классического многомерного кокуба [1].

Определение 1 ([3]) *n-мерным срединно-усеченным симплексом ($_{mt}Simp^n$), $n \geq 2$, называется n-мерный многогранник, представляющий собой выпуклую оболочку C^2_{n+1} точек (вершин срединно-усеченного симплекса), являющихся серединами 1-граней произвольного n-мерного симплекса.*

Процедура построения n-мерного срединно-усеченного симплекса, $n \geq 2$. Разобьем произвольный n-мерный симплекс $(n+1)$-й средними гиперплоскостями, проходящими через середины его ребер параллельно основаниям — $(n-1)$-граням. При этом образуются $(n+1)$ симплексов около вершин исходного (далее — привершинные симплексы), а также центральный n-мерный многогранник, являющийся искомым геометрическим объектом по построению.

Замечание 1 *Очевидно, в аффинных пространствах размерности четыре и выше срединно-усеченный симплекс представляет собой многомерный аналог октаэдра как конструктивного объекта.*

Теорема 1 ([3]) *n-мерный срединно-усеченный симплекс является выпуклым многогранником, $(n-1)$-грани которого представлены равным количеством многогранников двух типов, а именно:*

— симплексами;

— срединно-усеченными симплексами.

При этом количество i-граней, $i = \overline{0, n-1}$, n-мерного срединно-усеченного симплекса равно:

$$\begin{cases} N_i(_{mt}Simp^n) = (n-i+1)\cdot C^{n-i}_{n+1}, \;\; i = \overline{2, n-1}, \\ N_1(_{mt}Simp^n) = (n-1)\cdot C^{n-1}_{n+1}, \\ N_0(_{mt}Simp^n) = C^{n-1}_{n+1}. \end{cases} \tag{1}$$

Данная теорема предоставляет полное описание внутренней геометрической структуры и основных характеристик, однозначно идентифицирующих срединно-усеченные симплексы в аффинных пространствах произвольной размерности как самостоятельные геометрические объекты.

Одно из доказательств Теоремы 1, осуществленное методом прямого подсчета в соответствии со специальными методологическими подходами, разработанными автором для аффинных пространств размерности четыре и

выше, содержится в работе [3]. С целью полноты изложения целесообразным видится привести в рамках данной работы его сокращенный вариант.

Прежде чем приступить непосредственно к доказательствам Теоремы 1 методом прямого подсчета и методом математической индукции, сформулируем и докажем следующую лемму.

Лемма 1 а) *Каждый срединно-усеченный симплекс, являющийся i-гранью, $i = \overline{1, n-1}$, n-мерного срединно-усеченного симплекса, $n \geq 2$, принадлежит $(n-i)$ срединно-усеченным симплексам, являющимся $(i+1)$-гранями рассматриваемого геометрического объекта.*

б) *Каждый симплекс, являющийся i-гранью, $i = \overline{0, n-2}$, n-мерного срединно-усеченного симплекса, $n \geq 2$, принадлежит $(n-i-1)$ срединно-усеченным симплексам, являющимся $(i+2)$-гранями рассматриваемого геометрического объекта.*

Доказательство а) Предположим, что для i-граней n-мерного срединно-усеченного симплекса выполняется: ${}_{mt}Simp^i$ принадлежит $(n-i)$ многогранникам ${}_{mt}Simp^{i+1}$.

Докажем, что для $(i-1)$-граней ${}_{mt}Simp^{i-1}$ принадлежит $(n-i+1)$ многогранникам ${}_{mt}Simp^i$.

В n-мерном срединно-усеченном симплексе ${}_{mt}Simp^n$ каждый ${}_{mt}Simp^i$ принадлежит $(n-i)$ многогранникам ${}_{mt}Simp^{i+1}$. В свою очередь в каждом ${}_{mt}Simp^{i+1}$ каждый ${}_{mt}Simp^{i-1}$ принадлежит двум ${}_{mt}Simp^i$. Таким образом, каждая $(i-1)$-грань, являющаяся срединно-усеченным симплексом, принадлежит $\{(n-i)+1\}$ i-граням, являющимся срединно-усеченными симплексами.

б) Следуя общей методологии определения характеристик Эйлера-Пуанкаре многомерного срединно-усеченного симплекса, разработанной автором, все i-грани, являющиеся симплексами, учтены при подсчете i-граней совокупности ${}_{mt}Simp^{i+1}$, т.е. они считаются принадлежащими только $(i+1)$-мерным срединно-усеченным симплексам. Из п. а) данной леммы известно, что ${}_{mt}Simp^{i+1}$ принадлежит $(n-i-1)$ многогранникам ${}_{mt}Simp^{i+2}$. Следовательно, каждый $Simp^i$, являющийся i-гранью ${}_{mt}Simp^{i+1}$, принадлежит $(n-i-1)$ срединно-усеченным симплексам ${}_{mt}Simp^{i+2}$.

Отметим, что утверждения представленной леммы использованы как в процессе доказательства Теоремы 1 методом прямого подсчета, так и методом математической индукции.

Доказательство Теоремы 1 методом прямого подсчета [3]. При $n = 2, 3$ данная теорема очевидно справедлива, поскольку двумерный срединно-усеченный симплекс представляет собой треугольник, трехмерный – октаэдр.

Ввиду специфики разработанной методологии определения характеристик Эйлера-Пуанкаре n-мерного, $n \geq 4$, срединно/триадно-усеченного симплекса, согласно которой указанный процесс начинается с определения количества старших i-граней, $i = \overline{0, n-1}$, рассматриваемого многогранника, целесообразным видится изменить первоначальные обозначения i-граней следующим образом: $i := n - l$.

При этом утверждение (1) примет вид:

$$\begin{cases} N_{n-l}({}_{mt}Simp^n) = (l+1) \cdot C_{n+1}^{l}, \ 1 \leq l \leq n-2, \\ N_1({}_{mt}Simp^n) = (n-1) \cdot C_{n+1}^{n-1}, \\ N_0({}_{mt}Simp^n) = C_{n+1}^{n-1}. \end{cases}$$

I этап. Из геометрической структуры ${}_{mt}Simp^n$ как конструктивного объекта следует, что его $(n-1)$-грани представлены равным количеством многогранников двух типов, а именно:

• $(n+1)$-м симплексом, совокупность которых совпадает с совокупностью оснований привершинных симплексов;

• $(n+1)$-м срединно-усеченным симплексом, совокупность которых совпадает с совокупностью центральных многогранников $(n-1)$-граней исходного симплекса.

Таким образом, $N_{n-1}({}_{mt}Simp^n) = 2 \cdot (n+1) = 2 \cdot C_{n+1}^{1}$.

II этап. В дальнейшем, соответственно предложенной методологии, при последовательном переходе от i-граней к $(i-1)$-граням срединно-усеченного симплекса ${}_{mt}Simp^n$ с целью корректного подсчета количества последних в качестве первых рассматриваются только многогранники типа ${}_{mt}Simp$ во избежание учета $(i-1)$-граней оснований привершинных симплексов более чем единожды.

Следовательно, для подсчета количества $(n-2)$-граней срединно-усеченного симплекса ${}_{mt}Simp^n$ необходимо определить количество $(n-2)$-граней $(n+1)$ многогранников ${}_{mt}Simp^{n-1}$.

Каждый многогранник ${}_{mt}Simp^{n-1}$ вписан в $Simp^{n-1}$, который является $(n-1)$-гранью изначального симплекса $Simp^n$, и следовательно, имеет $2n$ $(n-2)$-граней: n симплексов $Simp^{n-2}$ и n срединно-усеченных симплексов ${}_{mt}Simp^{n-2}$. На данном этапе исследования внутренней структуры n-мерного срединно-усеченного симплекса его $(n-2)$-грани, которые являются

симплексами, учтены по одному разу; $(n-2)$-грани, которые являются многогранниками ${}_{mt}Simp^{n-2}$, учтены по два раза, т.к. каждая подобная грань принадлежит двум многогранникам ${}_{mt}Simp^{n-1}$ (п. а) Леммы 1). Получим следующее выражение для подсчета количества $(n-2)$-граней ${}_{mt}Simp^{n}$:

$N_{n-2}({}_{mt}Simp^{n})=\Big[$общее количество многогранников ${}_{mt}Simp^{n-1}\Big]\cdot\Big[$ количество $(n-2)$-граней многогранника ${}_{mt}Simp^{n-1}$ с учетом внутренней структуры срединно-усеченного симплекса ${}_{mt}Simp^{n}\Big] = \Big[$общее количество многогранников ${}_{mt}Simp^{n-1}\Big] \cdot \Big[$количество $(n-2)$-граней многогранника ${}_{mt}Simp^{n-1}$, которые являются симплексами $Simp^{n-2} + \Big($количество $(n-2)$-граней многогранника ${}_{mt}Simp^{n-1}$, которые являются многогранниками ${}_{mt}Simp^{n-2}\Big)\Big/2\Big]=(n+1)\cdot[n+n/2] = \dfrac{3\cdot(n+1)\cdot n}{2!} = 3\cdot C^2_{n+1}$.

$3\cdot C^2_{n+1}$ $(n-2)$-граней срединно-усеченного симплекса ${}_{mt}Simp^{n}$ представлены $(n+1)\cdot n$ симплексами $Simp^{n-2}$, которые согласно используемой методологии в дальнейшем подсчете i-граней не участвуют, и $[(n+1)\cdot n]/2$ многогранниками ${}_{mt}Simp^{n-2}$.

Таким образом, для подсчета $(n-3)$-граней срединно-усеченного симплекса ${}_{mt}Simp^{n}$ необходимо определить количество $(n-3)$-граней $[(n+1)\cdot n]/2$ многогранников ${}_{mt}Simp^{n-2}$.

Действуя подобным образом, получим следующие выражения для определения количества i-граней, $i=\overline{n-3,2}$, многогранника ${}_{mt}Simp^{n}$:

$N_{n-3}({}_{mt}Simp^{n}) = \dfrac{(n+1)\cdot n}{2}\cdot\left[(n-1)+\dfrac{n-1}{3}\right] = 4\cdot C^3_{n+1}$,

. . . . . .

$N_{n-l}({}_{mt}Simp^{n}) = (l+1)\cdot C^l_{n+1}$,

. . . . . .

$N_2({}_{mt}Simp^{n}) = \dfrac{(n+1)\cdot n\cdot(n-1)\cdot....\cdot 5}{(n-3)!}\cdot\left[4+\dfrac{4}{n-2}\right] = (n-1)\cdot C^{n-2}_{n+1}$.

Если переписать последнее выражение в виде $N_2({}_{mt}Simp^{n}) = (n-2)\cdot C^{n-2}_{n+1} + C^{n-2}_{n+1}$, можно убедиться, что 2-грани срединно-усеченного симплекса ${}_{mt}Simp^{n}$ представлены $(n-2)\cdot C^{n-2}_{n+1}$ симплексами $Simp^2$, которые согласно используемой методологии в дальнейшем подсчете i-граней не участвуют, и C^{n-2}_{n+1} срединно-усеченными симплексами ${}_{mt}Simp^{2}$. Заметим, что на данном этапе двумерные срединно-усеченные симплексы представляют собой треугольники, состоящие по сути из трех одномерных симплексов (отрезков) и трех одномерных срединно-усеченных симплексов (точек). Напомним, что одномерный симплекс принадлежит только одному двумерному срединно-усеченному симплексу.

Таким образом, для подсчета 1-граней срединно-усеченного симплекса ${}_{mt}Simp^n$ необходимо определить количество 1-граней C_{n+1}^{n-2} треугольников ${}_{mt}Simp^2$: $N_1({}_{mt}Simp^n) = 3 \cdot C_{n+1}^{n-2} = (n-1) \cdot C_{n+1}^{n-1}$.

III этап. Количество вершин (0-граней) срединно-усеченного симплекса ${}_{mt}Simp^n$ совпадает с количеством ребер изначального симплекса построения $Simp^n$ по определению: $N_0({}_{mt}Simp^n) = r(Simp^n) = C_{n+1}^2 = C_{n+1}^{n-1}$.

В качестве результата имеем следующие формулы подсчета количества i-граней, $i = \overline{0, n-1}$, срединно-усеченного симплекса ${}_{mt}Simp^n$, $n \geq 4$:

$$\begin{cases} N_{n-l}({}_{mt}Simp^n) = (l+1) \cdot C_{n+1}^l, \ 1 \leq l \leq n-2, \\ N_1({}_{mt}Simp^n) = (n-1) \cdot C_{n+1}^{n-1}, \\ N_0({}_{mt}Simp^n) = C_{n+1}^{n-1}. \end{cases}$$

После обратной замены $n - l := i$ получим искомое утверждение (1).

IV этап. *Проверка достоверности результатов.* Как известно в случае выпуклых многогранников произвольной размерности $n \geq 2$ справедлива формула Эйлера-Пуанкаре [1], согласно которой:

$$\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \cdot N_i = 1 + (-1)^{n-1},$$

где N_i — количество i-граней рассматриваемого многогранника.

Основываясь на полученных результатах в части характеристик Эйлера-Пуанкаре многомерного срединно-усеченного симплекса, несложно убедиться, что в данном случае формула Эйлера-Пуанкаре действительно справедлива.

Следствие 1 ([3]) *i-грани, $i = \overline{n-1, 2}$, n-мерного срединно-усеченного симплекса представлены $(n-i) \cdot C_{n+1}^{n-i}$ симплексами и C_{n+1}^{n-i} срединно-усеченными симплексами.*

Данное следствие естественным образом вытекает из первого представленного доказательства Теоремы 1.

Доказательство Теоремы 1 методом математической индукции. При $n = 2, 3$ данная теорема очевидно справедлива, поскольку двумерный срединно-усеченный симплекс представляет собой треугольник, трехмерный – октаэдр.

Предположим, что в аффинном пространстве V^n, $n \geq 4$, n-мерный срединно-усеченный симплекс имеет следующие характеристики Эйлера-Пуанкаре:

$$\begin{cases} N_i({}_{mt}Simp^n) = (n-i+1)\cdot C_{n+1}^{n-i}, \;\; i = \overline{2, n-1}, \\ N_1({}_{mt}Simp^n) = (n-1)\cdot C_{n+1}^{n-1}, \\ N_0({}_{mt}Simp^n) = C_{n+1}^{n-1}. \end{cases}$$

При этом для i-граней, $i = \overline{0, n-1}$, указанного многогранника выполнены условия Леммы 1.

Рассмотрим $(n+1)$-мерный срединно-усеченный симплекс в аффинном пространстве V^{n+1}, $n \geq 4$. Докажем, что его характеристики Эйлера-Пуанкаре имеют вид:

$$\begin{cases} N_i({}_{mt}Simp^{n+1}) = (n-i+2)\cdot C_{n+2}^{n-i+1}, \;\; i = \overline{2, n}, \\ N_1({}_{mt}Simp^{n+1}) = n\cdot C_{n+2}^{n}, \\ N_0({}_{mt}Simp^{n+1}) = C_{n+2}^{n}. \end{cases}$$

$(n+1)$-мерный срединно-усеченный симплекс вписан в $(n+1)$-мерный симплекс. Следовательно, его n-грани представлены равным количеством многогранников двух типов:

- $(n+2)$-мя симплексами;
- $(n+2)$-мя срединно-усеченными симплексами.

Отсюда, $N_n({}_{mt}Simp^{n+1}) = 2\cdot(n+2) = 2\cdot C_{n+2}^{1}$.

Изначальный симплекс построения $(n+1)$-мерного срединно-усеченного симплекса имеет $(n+2)$-е вершины, к каждой из которых примыкают $(n+1)$ боковых n-граней. Поэтому любое основание $(n+1)$-мерного привершинного симплекса, являющееся n-гранью срединно-усеченного симплекса ${}_{mt}Simp^{n+1}$, имеет по одной общей $(n-1)$-грани с каждым из $(n+1)$ многогранников ${}_{mt}Simp^{n}$, вписанных в указанные боковые грани изначального симплекса построения. Таким образом, если рассматривать $(n-1)$-грани только многогранников ${}_{mt}Simp^{n}$, все $(n-1)$-грани оснований привершинных симплексов также будут учтены.

На основании изложенного можно сделать следующий вывод:

для того, чтобы определить количество i-граней, $i = \overline{0, n-1}$, $(n+1)$-мерного срединно-усеченного симплекса, необходимо определить соответствующее количество i-граней $(n+2)$-х n-мерных срединно-усеченных симплексов, склеенных по $(n-1)$-мерным срединно-усеченным симплексам.

Количество i-граней, $i = \overline{2, n-1}$, каждого из $(n+2)$-х n-мерных срединно-усеченных симплексов равно: $N_i({}_{mt}Simp^{n}) = (n-i+1)\cdot C_{n+1}^{n-i}$.

При этом каждая совокупность i-граней указанных многогранников, $i = \overline{2, n-1}$, представлена $(n-i)\cdot C_{n+1}^{n-i}$ симплексами и C_{n+1}^{n-i} срединно-усеченными симплексами (см. Следствие 1).

После склеивания $(n+2)$-х n-мерных срединно-усеченных симплексов каждый такой i-мерный симплекс принадлежит $(n-i)$ многогранникам ${}_{mt}Simp^{i+2}$, каждый i-мерный срединно-усеченный симплекс принадлежит $(n-i+1)$ многогранникам ${}_{mt}Simp^{i+1}$.

Данный факт подтверждается нижеследующим.

• Известно (п. б) Леммы 1), что для каждого из $(n+2)$-х n-мерных срединно-усеченных симплексов выполнено: $\forall\ i = \overline{2, n-2}$, $n \geq 4$, симплекс $Simp^i$ принадлежит $(n-i-1)$ срединно-усеченным симплексам ${}_{mt}Simp^{i+2}$.

В каждом $(n-1)$-мерном срединно-усеченном симплексе ${}_{mt}Simp^{n-1}$, по которым происходит склеивание, $Simp^i$ принадлежит $(n-i-2)$ многогранникам ${}_{mt}Simp^{i+2}$. Поскольку при склеивании многогранники ${}_{mt}Simp^{n-1}$ совмещаются, в каждом из двух n-мерных срединно-усеченных симплексов $(n-i-2)$ многогранников ${}_{mt}Simp^{i+2}$ принадлежат общему $(n-1)$-мерному срединно-усеченному симплексу. Одновременно, следуя п. б) Леммы 1, в каждом из двух n-мерных срединно-усеченных симплексов каждый симплекс $Simp^i$ принадлежит $(n-i-1)$ многогранникам ${}_{mt}Simp^{i+2}$. Следовательно, после склеивания каждый $Simp^i$ принадлежит $\{(n-i-2)+1+1\} = (n-i)$ многогранникам ${}_{mt}Simp^{i+2}$.

• Известно (п. а) Леммы 1), что для каждого из $(n+2)$-х n-мерных срединно-усеченных симплексов выполнено: $\forall\ i = \overline{2, n-1}$, $n \geq 4$, срединно-усеченный симплекс ${}_{mt}Simp^i$ принадлежит $(n-i)$ срединно-усеченным симплексам ${}_{mt}Simp^{i+1}$.

Склеивание n-мерных срединно-усеченных симплексов ${}_{mt}Simp^n$ происходит по $(n-1)$-мерным срединно-усеченным симплексам ${}_{mt}Simp^{n-1}$, для которых выполнено: ${}_{mt}Simp^i$ принадлежит $(n-i-1)$ многогранникам ${}_{mt}Simp^{i+1}$. Поскольку при склеивании многогранники ${}_{mt}Simp^{n-1}$ совмещаются, в каждом из двух n-мерных срединно-усеченных симплексов $(n-i-1)$ многогранников ${}_{mt}Simp^{i+1}$ принадлежат общему $(n-1)$-мерному срединно-усеченному симплексу. Одновременно, следуя п. а) Леммы 1, в каждом из двух n-мерных срединно-усеченных симплексов каждый ${}_{mt}Simp^i$ принадлежит $(n-i)$ многогранникам ${}_{mt}Simp^{i+1}$. Следовательно, после склеивания каждый ${}_{mt}Simp^i$ принадлежит $\{(n-i-1)+1+1\} = (n-i+1)$ многогранникам ${}_{mt}Simp^{i+1}$.

Таким образом, поскольку в процессе склеивания $(n+2)$-х n-мерных срединно-усеченных симплексов каждая i-грань такого многогранника, являющаяся симплексом, изначально учтена $(n-i)$ раз, а каждая i-грань, являющаяся срединно-усеченным симплексом, учтена $(n-i+1)$ раз, получим

следующее выражение для определения количества i-граней, $i = \overline{2, n-1}$, $(n+1)$-мерного срединно-усеченного симплекса:

$$N_i({}_{mt}Simp^{n+1}) = (n+2) \cdot \left[\Big(\text{количество } i - \text{граней } {}_{mt}Simp^n, \right.$$
$$\text{являющихся симплексами} \Big) \Big/ (n-i) + \Big(\text{количество } i - \text{граней } {}_{mt}Simp^n,$$
$$\left. \text{являющихся срединно-усеченными симплексами} \Big) \Big/ (n-i+1) \right] =$$
$$= (n+2) \cdot \left[\frac{(n-i) \cdot C_{n+1}^{n-i}}{n-i} + \frac{C_{n+1}^{n-i}}{n-i+1} \right] = (n+2) \cdot C_{n+1}^{n-i} \cdot \left[1 + \frac{1}{n-i+1} \right] =$$
$$= (n+2) \cdot C_{n+1}^{n-i} \cdot \frac{n-i+2}{n-i+1} = \frac{(n+2)(n+1)!(n-i+2)}{(n-i)!(i+1)!(n-i+1)} =$$
$$= (n-i+2) \cdot \frac{(n+2)!}{(i+1)!(n-i+1)!} = (n-i+2) \cdot C_{n+2}^{n-i+1}, \; i = \overline{2, n-1}.$$

При этом указанные i-грани, $i = \overline{2, n-1}$, очевидно, представлены $(n - i + 1) \cdot C_{n+2}^{n-i+1}$ симплексами и C_{n+2}^{n-i+1} срединно-усеченными симплексами.

В процессе определения количества 1- и 0- граней $(n+1)$-мерного срединно-усеченного симплекса необходимо учитывать, что произвольный срединно-усеченный симплекс является предельным случаем усечения изначального симплекса построения. Т.е. его 2-грани, являющиеся срединно-усеченными симплексами (Рис. 1), представляют собой треугольники, состоящие по сути из трех отрезков (одномерных симплексов) и трех точек (одномерных срединно-усеченных симплексов или нульмерных симплексов).

Таким образом, для определения количества 1-граней $(n+1)$-мерного срединно-усеченного симплекса, как результата склеивания $(n+2)$-х n-мерных срединно-усеченных симплексов, необходимо использовать зависимость Леммы 1 для *одномерных симплексов*; для определения количества 0-граней — зависимость для *одномерных срединно-усеченных симплексов* или *нульмерных симплексов*, что приводит к одинаковым результатам, поскольку последние являются эквивалентными геометрическими объектами.

Следуя Лемме 1, для каждого из $(n+2)$-х n-мерных срединно-усеченных симплексов выполнено: $Simp^1$ принадлежит $(n-2)$ многогранникам ${}_{mt}Simp^3$, ${}_{mt}Simp^1$ принадлежит $(n-1)$ многогранникам ${}_{mt}Simp^2$.

Аналогично i-граням большей размерности, после склеивания $(n+2)$-х n-мерных срединно-усеченных симплексов по $(n-1)$-мерным срединно-усеченным симплексам имеем следующую зависимость: одномерный

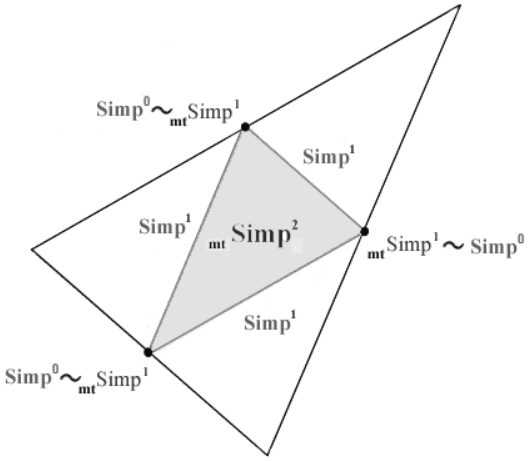

Рис. 1 Геометрическая структура двумерного срединно-усеченного симплекса

симплекс $Simp^1$ (*отрезок*) принадлежит $(n-1)$ трехмерным срединно-усеченным симплексам ${}_{mt}Simp^3$, одномерный срединно-усеченный симплекс ${}_{mt}Simp^1$ (*точка*) принадлежит n двумерным срединно-усеченным симплексам ${}_{mt}Simp^2$.

Таким образом,

$$N_1({}_{mt}Simp^{n+1}) = (n+2)\cdot\Big(\text{количество } 1-\text{граней } {}_{mt}Simp^n, \text{ являющихся симплексами}\Big)\Big/(n-1) =$$
$$= (n+2)\cdot\frac{(n-1)\cdot C_{n+1}^{n-1}}{n-1} = \frac{(n+2)\cdot(n+1)!}{(n-1)!\cdot 2!} = n\cdot\frac{(n+2)!}{n!\cdot 2!} = n\cdot C_{n+2}^n,$$

$$N_0({}_{mt}Simp^{n+1}) = (n+2)\cdot\Big(\text{количество } 1-\text{граней } {}_{mt}Simp^n, \text{ являющихся срединно-усеченными симплексами}\Big)\Big/n =$$
$$= (n+2)\cdot\frac{C_{n+1}^{n-1}}{n} = \frac{(n+2)\cdot(n+1)!}{n\cdot(n-1)!\cdot 2!} = \frac{(n+2)!}{n!\cdot 2!} = C_{n+2}^n.$$

На основании изложенного, характеристики Эйлера-Пуанкаре $(n+1)$-мерного срединно-усеченного симплекса в аффинном пространстве V^{n+1}, $n \geq 4$, действительно имеют вид:

$$\begin{cases} N_i({}_{mt}Simp^{n+1}) = (n-i+2)\cdot C_{n+2}^{n-i+1}, \;\; i = \overline{2,n}, \\ N_1({}_{mt}Simp^{n+1}) = n\cdot C_{n+2}^n, \\ N_0({}_{mt}Simp^{n+1}) = C_{n+2}^n. \end{cases}$$

Данным доказательством также подтверждается справедливость Следствия 1.

Следствие 2 *Степень произвольной вершины n-мерного срединно-усеченного симплекса, $n \geq 2$, равна $2 \cdot (n-1)$.*

Доказательство Процедура построения n-мерного срединно-усеченного симплекса, $n \geq 2$, естественным образом обуславливает равенство степеней его вершин.

Определить степень вершины рассматриваемого многогранника можно следующим образом. Из Теоремы 1 известно: $N_1({}_{mt}Simp^n) = (n-1) \cdot C_{n+1}^{n-1}$, $N_0({}_{mt}Simp^n) = C_{n+1}^{n-1}$. Отсюда, степень вершины равна:

$$\frac{2 \cdot N_1({}_{mt}Simp^n)}{N_0({}_{mt}Simp^n)} = \frac{2 \cdot (n-1) \cdot C_{n+1}^{n-1}}{C_{n+1}^{n-1}} = 2 \cdot (n-1).$$

Следствие 3 *Многогранник, дуальный n-мерному срединно-усеченному симплексу, $n \geq 2$, имеет следующие характеристики Эйлера-Пуанкаре:*

$$\begin{cases} N_{n-1} = C_{n+1}^{n-1}, \\ N_{n-2} = (n-1) \cdot C_{n+1}^{n-1}, \\ N_i = (i+2) \cdot C_{n+1}^{i+1}, \;\; i = \overline{n-3, 0}. \end{cases}$$

При этом единственными случаями самодуальности срединно-усеченного симплекса являются дву- и четырехмерный срединно-усеченные симплексы.

Доказательство Первая часть утверждения очевидна (см. например [1]).

Самодуальность двумерного срединно-усеченного симплекса является очевидной, поскольку он представляет собой треугольник. Кроме того, данный факт можно установить, исходя из равенства количества старших и младших i-граней (1- и 0- граней соответственно) на основе характеристик Эйлера-Пуанкаре n-мерного срединно-усеченного симплекса (1), что при $n = 2$ является необходимым и достаточным условием.

Рассмотрим n-мерный срединно-усеченный симплекс при $n \geq 3$. В данном случае одним из необходимых условий самодуальности является равенство количества его старших и младших i-граней, $i = \overline{0, n-1}$, т. е.: $N_{n-1}({}_{mt}Simp^n) = N_0({}_{mt}Simp^n)$, что, исходя из (1), справедливо только при $n = 4$. Четырехмерный срединно-усеченный симплекс действительно является самодуальным, поскольку его характеристики Эйлера-Пуанкаре имеют вид: $N_0({}_{mt}Simp^4) = 10$, $N_1({}_{mt}Simp^4) = 30$, $N_2({}_{mt}Simp^4) = 30$, $N_3({}_{mt}Simp^4) = 10$.

В заключение отметим, что многомерные срединно-усеченные симплексы возникают в процессе построения некоторых типов конструктивных фрактальных симплекс-множеств в аффинных пространствах произвольной размерности, а именно многомерного каркаса Серпинского I типа и многомерного пластинчатого симплекса I типа [5]. Последние представляют собой результат счетной процедуры исключений, в целом аналогичной, например, процедуре построения треугольной салфетки Серпинского на плоскости [6].

Полученные результаты могут представлять интерес не только для специалистов в области фрактального анализа, но и многомерной геометрии в целом. Предложенные в работе методологические подходы могут быть полезными в процессе исследований внутренней геометрической структуры и основных характеристик усеченных многогранников, а также конструктивных фрактальных множеств в аффинных пространствах произвольной размерности, в частности, в процессе исследований, посвященных аналитико-геометрическому описанию последних.

Список литературы

1. Берже М.: Геометрия. В 2 т. М.:Мир, 1984.
2. Математическая энциклопедия. Гл. ред. И.М. Виноградов. Москва, "Советская энциклопедия" , 1977-1985.
3. Резникова Ю.С.: Срединно-усеченные симплексы в аффинных пространствах произвольной мерности. Наук. часопис НПУ ім. М. П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки **6**, 235–242 (2005).
4. Резникова Ю.С.: Срединно-усеченные симплексы в четырехмерном аффинном пространстве. Укр. мат журн. **59** (4), 566–570 (2007).
5. Резникова Ю.С.: Многомерный пластинчатый симплекс I типа. Матеріали конференції "Фрактали і сучасна математика" , Київ, 24 грудня 2009 р., 91–92.
6. Федер Е.: Фракталы. М.:Мир, 1991, 260 стр.

Ю. С. Резникова

Институт математики НАН Украины, Киев, Украина

E-mail: yurss@mail.ru

Proc. Intern. Geom. Center 2009 **2**(4) 69–74 $d\omega$

Естественная связность в обобщенном лагранжевом пространстве со специальной метрикой

О. П. Сурина

Представлено А.Г. Кушнером

Аннотация Для специальной обобщенной лагранжевой метрики строится метрическая финслерова связность. Найдены необходимые и достаточные условия, при которых эта связность является связностью Бервальда.

Ключевые слова Обобщенные лагранжевы пространства · Финслерова связность · Связность Бервальда · Связность Картана

УДК 514.76

1. В работе [1] авторы рассматривают геометрическую теорию гравитационного и электромагнитного полей на основе обобщенного лагранжева пространства с метрикой [2]

$$g_{ij}(x,y) = e^{2\sigma(x,y)}\gamma_{ij}(x), \tag{1}$$

где $\gamma_{ij}(x)$ — компоненты (псевдо) риманова метрического тензора γ базисного многообразия M, $\sigma(x,y)$ — функция на касательном расслоении TM $(x \in M,\ z = (x,y) \in TM,\ x \to (x^i))$ — локальные координаты на M, $(x,y) \to (x^i, y^i)$ — естественные локальные координаты на TM, $y = y^i\partial_i$, $\partial_i = \partial/\partial x^i$, $(i,j,... = 1,...,n = \dim M)$.

Поставим задачу присоединения к метрике (1) финслеровой связности. Пусть $B = \bigcup_{x\in M}\{r_x\}$ — главное расслоенное многообразие линейных реперов на M. Каноническая проекция $\pi : TM \to M$ индуцирует на

TM расслоенное многообразие финслеровых линейных реперов $\pi^*B = \bigcup_{z\in TM}\{r_{\pi(z)}\}$. Каждый такой репер представляет собой совокупность точки $z \in TM$ и n линейно независимых векторов из T_xM — касательного пространства к многообразию M в точке $x = \pi(z)$. Финслеровой связностью на M называется связность в главном расслоенном многообразии финслеровых линейных реперов π^*B. Пусть ω_j^k — локальные формы связности, определенные в координатных окрестностях касательного расслоения TM. Разложим эти формы по естественному базису $\{dx^i, dy^i\}$

$$\omega_j^k = L_{ij}^k dx^i + C_{ij}^k dy^i. \tag{2}$$

Предположим теперь, что на TM задана некоторая инфинитезимальная (нелинейная, внутренняя) связность, т.е. распределение $H : z \to H_z$ горизонтальных площадок и $\delta_j = \partial_j - H_j^k\dot{\partial}_k$ — локальных базис векторных полей этого распределения ($\dot{\partial}_k = \partial/\partial y^k$). Разложим формы ω_j^k по адаптированному базису $\{dx^i, \delta y^k = dy^k + H_j^k dx^j\}$ дуальному к $\{\partial_j, \delta_j\}$

$$\omega_j^k = F_{ij}^k dx^i + C_{ij}^k \delta y^i, \tag{3}$$

где

$$F_{ij}^k = L_{ij}^k - C_{pj}^k H_i^p. \tag{4}$$

При замене локальных координат функции $F_{ij}^k(x, y)$ преобразуются по известному закону коэффициентов линейной связности, а $C_{ij}^k(x, y)$ — по тензорному закону. Таким образом, финслерова связность определяется набором функций $(H_j^k, F_{ij}^k, C_{ij}^k)$, заданных на TM. С помощью форм ω_j^k, как обычно, определяется ковариантный дифференциал $\mathcal{D}$ и ковариантные горизонтальные и вертикальные производные. Так для финслерова фундаментального векторного поля $y = y^k\partial_k$ имеем:

$$\mathcal{D}y^k = dy^k + \omega_j^k y^j, \tag{5}$$

или

$$\mathcal{D}y^k = (\delta_i^k + C_{ip}^k y^p)dy^i + L_{ip}^k y^p dx^i, \tag{6}$$

где δ_i^k — символ Кронекера. Из (6) следует, что формы dx^k, $\mathcal{D}y^k$ линейно независимы тогда и только тогда, когда матрица

$$M_i^k = \delta_i^k + C_{ip}^k y^p \tag{7}$$

является невырожденной. В этом случае финслерова связность называется регулярной. Регулярная связность порождает инфинитезимальную связность, горизонтальное распределение которой определяется системой

Пфаффа $\mathcal{D}y^k = 0$. Если $F^k_{ij}y^j = H^k_i$, то финслерова связность называется связностью Картана. В этом случае это распределение совпадает с распределением исходной связности. Действительно,

$$\mathcal{D}y^k = dy^k + \omega^k_j y^j = dy^k + (L^k_{ij}y^j dx^i + C^k_{ij}y^j dy^i) =$$

$$= (\delta^k_i + C^k_{ij}y^j)dy^i + L^k_{ij}y^j dx^i = M^k_i dy^i + (F^k_{ij}y^j + C^k_{pj}y^j H^p_i)dx^i =$$

$$= M^k_i dy^i + (H^k_i + C^k_{pj}y^j H^p_i)dx^i = M^k_i dy^i + H^p_i(\delta^k_p + C^k_{pj}y^j)dx^i =$$

$$= M^k_i dy^i + H^p_i M^k_p dx^i = M^k_p(dy^p + H^p_i dx^i) = M^k_p \delta y^p$$

и в силу невырожденности M^k_p условия $\mathcal{D}y^k = 0$ и $\delta y^k = 0$ определяют одно и то же распределение.

Финслерова связность называется метрической, если метрический тензор в этой связности ковариантно постоянен, то есть горизонтальная и вертикальная ковариантные производные от метрического тензора равны нулю. Требуя еще и симметрию F^k_{ij} и C^k_{ij} по нижним индексам, находим явное выражение коэффициентов связности

$$F^k_{ij} = \frac{1}{2}g^{sk}(\delta_i g_{sj} + \delta_j g_{is} - \delta_s g_{ij}), \tag{8}$$

$$C^k_{ij} = \frac{1}{2}g^{sk}(\dot\partial_i g_{sj} + \dot\partial_j g_{is} - \dot\partial_s g_{ij}). \tag{9}$$

Заметим, что тензорную часть можно взять и в виде

$$C^k_{ij} = \frac{1}{2}g^{sk}(\dot\partial_i g_{js}), \tag{10}$$

если потребовать симметрию тензора $C_{ijk} = C^p_{ij}g_{kp}$ по индексам j, k.

2. Для обобщенной лагранжевой метрики (1) найдем явное выражение коэффициентов естественной метрической финслеровой связности, взяв за исходную инфинитезимальную связность связность Леви-Чивита метрики $\gamma_{ij}(x)$ [3]. В этом случае $H^k_i = \Gamma^k_{ip}y^p$ и, в соответствии с формулой (8), получим

$$F^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} + \delta^k_i\delta_j\sigma + \delta^k_j\delta_i\sigma - \gamma^{sk}\gamma_{ij}\delta_s\sigma. \tag{11}$$

Если, в частности, $\dot\partial_i\sigma = 0$, то есть метрика (1) является (псевдо) римановой, то (11) являются известными соотношениями, связывающими коэффициенты связности конформно соответствующих пространств. Тензорную часть можно определить формулой (10). Для метрики (1) имеем:

$$C^k_{ij} = \dot\partial_i\sigma\delta^k_j. \tag{12}$$

Заметим, что если обобщенное лагранжево пространство является обобщенным финслеровым, то есть функция $\sigma(x, y)$ однородная нулевой степени по слоевым координатам: $y^k\dot{\partial}_k\sigma = 0$, то мы получаем регулярную связность, так как матрица M_i^k, определенная формулой (7) имеет вид

$$M_i^k = \delta_i^k + y^k\dot{\partial}_i\sigma. \tag{13}$$

Эта матрица является невырожденной, так как

$$\tilde{M}_i^k = \delta_i^k - y^k\dot{\partial}_i\sigma \tag{14}$$

является матрицей, обратной к M_i^k. Кроме того, для тензорной части имеет место равенство $C_{ij}^k y^i = 0$, что вместе с соответствующими условиями однородности функций H_j^k, F_{ij}^k, C_{ij}^k гарантирует инвариантность этой связности относительно слоевых гомотетий.

3.

Теорема 1 *Коэффициенты F_{ij}^k естественной финслеровой связности совпадает с коэффициентами Γ_{ij}^k связности Леви-Чивита тогда и только тогда, когда $\delta_k\sigma = 0$.*

Доказательство. Действительно, разность указанных связностей есть тензор

$$\delta_i^k\delta_j\sigma + \delta_j^k\delta_i\sigma - \gamma^{kp}\gamma_{ij}\delta_p\sigma. \tag{15}$$

Если $F_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k$, то этот тензор равен нулю

$$\delta_i^k\delta_j\sigma + \delta_j^k\delta_i\sigma - \gamma^{kp}\gamma_{ij}\delta_p\sigma = 0. \tag{16}$$

Свернув в (16) индексы i и k, получим $n\delta_j\sigma = 0$, т.е. $\delta_k\sigma = 0$. Обратно, если $\delta_j\sigma$, то тензор (15) обращается в нуль и связности совпадают.

Заметим, что условию $\delta_k\sigma = 0$ удовлетворяют все обобщенные лагранжевы пространства с метрикой (1), у которых база M плоская относительно римановой метрики $\gamma_{ij}(x)$, а $\sigma = \sigma(y)$.

Теорема 2 *Естественная финслерова связность для метрики (1) совпадает со связностью Леви-Чивита римановой метрики $\gamma_{ij}(x)$ тогда и только тогда, когда эти метрики совпадают.*

Это немедленно следует из условий $\delta_k\sigma = 0$ и $C_{ij}^k = 0$.

Теорема 3 *Естественная финслерова связность для метрики (1) является связностью Бервальда, то есть* $F^k_{ij} = F^k_{ij}(x)$ *тогда и только тогда, когда полубазисная 1-форма* $\omega = \dot\partial_k\sigma dx^k$ *ковариантно постоянна в связности Леви-Чивита.*

Доказательство. Пусть F^k_{ij} не зависит от слоевых координат, то есть $\dot\partial_l F^k_{ij} = 0$. Дифференцируя (11) по слоевым координатам, получим

$$\delta^k_i\dot\partial_l(\delta_j\sigma) + \delta^k_j\dot\partial_l(\delta_i\sigma) - \gamma^{kp}\gamma_{ij}\dot\partial_l(\partial_p\sigma) = 0. \tag{17}$$

В (17) свернем индексы i и k. В результате получим $n\dot\partial_l(\delta_j\sigma) = 0$, то есть $\dot\partial_l(\delta_j\sigma) = 0$. Распишем последнее равенство

$$\dot\partial_l(\partial_j\sigma - \Gamma^s_{jp}y^p\dot\partial_s\sigma) = \dot\partial_l(\partial_j\sigma) - \Gamma^s_{jp}y^p\dot\partial_s(\dot\partial_l\sigma) - \Gamma^s_{jl}\dot\partial_s\sigma = 0. \tag{18}$$

Равенство (18) означает, что $\nabla_j(\dot\partial_l\sigma) = 0$. Обратно, если $\nabla_l(\delta_j\sigma) = 0$, то есть $\dot\partial_l(\delta_j\sigma) = 0$, то $\dot\partial_l F^k_{ij} = 0$ и, следовательно, мы имеем связность Бервальда.

Список литературы

1. Miron R., Watanabe S. Geometric theory of gravitations and electronics fields in the spaces with the metric $e^{2\sigma(x,y)}\gamma_{ij}(x)$ // Mem.Sec.sti.ser/ Acad RSR. - 1992(1994), 15, N1, p.9-23.
2. Watanabe S., Ikeda S., Ikeda F. On a metric Finsler connections of generalized Finsler metric $g_{ij} = e^{2\sigma(x,y)}\gamma_{ij}(x)$ // Tensor, **40**, 1983, p. 97-102.
3. О. П. Сурина. Естественная связность в обобщенном финслеровом простанстве со специальной метрикой // Тезисы докладов Международной научной конференции “Лаптевские чтения-2009”. Москва–Тверь, 25-28 августа 2009г. Тверь, 2009. С.34.

О. П. Сурина

Пензенский государственный педагогический университет им. В. Г. Белинского, Пенза, Россия

E-mail: geometry@spu-penza.ru

Proc. Intern. Geom. Center 2009 **2**(4) 75–82 $d\omega$

Об инфинитезимальных автоморфизмах сасакиевых форм

Н. А. Тяпин

Представлено А.Г. Кушнером

Аннотация В статье исследуется специальный класс максимально подвижных почти контактных метрических многообразий: сасакиевы формы постоянной φ-аналитической кривизны -3. В специальной системе координат выписаны компоненты структурных объектов, найдены базисные векторные поля алгебры Ли инфинитезимальных автоморфизмов рассмотренных структур.

Ключевые слова Почти контактные метрические структуры · Сасакиевы структуры · Теорема Танно · Автоморфизмы сасакиевых форм

УДК 514.76

Пусть M — гладкое многообразие размерности $2n+1$, η — дифференциальная 1-форма. Форма η определяет на M контактную структуру, если форма $\eta \wedge \Omega^n$, где $\Omega = d\eta$ является формой объема. Многообразие с фиксированной на нем контактной структурой называется *контактным многообразием*.

Из классической теоремы Дарбу вытекает, что контактное многообразие M допускает атлас, в каждой карте (U, φ) которого с координатами $\{x^1, \ldots, x^{2n}, x^{2n+1}\}$ форма η имеет вид

$$\eta = x^1 dx^{n+1} + \cdots + x^n dx^{2n} + dx^{2n+1}.$$

Они называются *атласом Дарбу* и *картами Дарбу* соответственно. Контактная форма и ее внешний дифференциал определяют распределения

$\mathfrak{L} = \ker\eta$ и $\mathfrak{M} = \ker d\eta$, называемые *первым* и *вторым фундаментальными распределениями* соответственно.

Почти контактную структуру на многообразии M^{2n+1} определяет тройка тензорных полей: ξ — векторное поле, называемое также *характеристическим*; η — дифференциальная 1-форма; Φ — поле тензора типа $(1,1)$, структурный эндоморфизм. Эти объекты должны удовлетворять следующим условиям [1,4]:

$$\eta(\xi) = 1, \qquad \Phi\xi = 0, \qquad \eta(\Phi X) = 0, \qquad \Phi^2 = -id + \eta \otimes \xi,$$

для любого векторного поля X на M.

Если, кроме того, на M задана риманова метрика g, такая что

$$g(\Phi X, \Phi Y) = g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y),$$

для любых векторных полей X, Y, то говорят, что на многообразии M задана *почти контактная метрическая структура* (η, ξ, Φ, g).

Векторное поле v является инфинитезимальным автоморфизмом почти контактной метрической структуры, если производные Ли от всех структурных объектов вдоль этого векторного поля равны нулю:

$$L_v\eta = 0, \quad L_v\xi = 0, \quad L_v\Phi = 0, \quad L_v g = 0. \tag{1}$$

Вопрос о максимальной размерности группы автоморфизмов почти контактных метрических структур был решен С. Танно [2], а именно, имеет место

Теорема 1 *Пусть M^{2n+1} — связное почти контактное риманово многообразие со структурными объектами (η, ξ, ϕ, g). Тогда максимальная размерность его группы автоморфизмов равна $(n+1)^2$. Максимум будет достигаться если и только если секционная кривизна в направлении двумерных площадок содержащих вектор ξ будет постоянной K, и M является одним из следующих пространств:*

1) $K > 0$: однородное сасакиево многообразие (или его ε-деформация) постоянной φ-аналитической кривизны с,

2) $K = 0$: 6 глобальных римановых произведений: $T \times CP^n$, $T \times CE^n$, $T \times CD^n$, $L \times CP^n$, $L \times CE^n$, $L \times CD^n$,

3) $K < 0$: прямое произведение $L \times_{ct} CE^n$ с метрикой вида: $g_{(t,x)} = (dt)^2_{(t)} + e^{2ct} G_{(x)}$.

В принятых обозначениях L — прямая, T — окружность, CP^n — комплексное проективное пространство с метрикой Фубини-Штуди, CE^n — унитарное пространство, CD^n — открытый шар с однородной келеровой структурой отрицательной постоянной голоморфной секционной кривизны.

ε-деформация определяется следующим образом. Пусть мы имеем сасакиеву структуру $\mathfrak{T} = (\eta, \xi, \phi, g)$. Получим новые структурные объекты следующим образом:

$$\xi^* = \xi, \qquad \eta^* = \eta, \qquad \Phi^* = \varepsilon\Phi, \qquad g^* = \frac{1}{\varepsilon\beta} g + (1 - \frac{1}{\varepsilon\beta})\eta \otimes \eta, \qquad (2)$$

где β — действительное, не равное нулю число, а ε — знак β. Структура $\mathfrak{T}^* = (\eta^*, \xi^*, \phi^*, g^*)$ также является почти контактной метрической. Говорят, что она получена из исходной структуры с помощью ε-деформации.

Почти контактная метрическая структура называется *контактной метрической структурой*, если выполняется условие $(d\eta)_{ab} = 2g_{ac}\Phi^c_b$. Эти структуры нередко называют также почти сасакиевыми структурами. Форма η на контактном метрическом многообразии является контактной формой, определяющей контактную структуру, чем и объясняется термин "контактная метрическая структура". Такие структуры естественно возникают на расширенном фазовом пространстве механических систем.

Тензор Нейенхейса для аффиннора почти контактной структуры имеет вид

$$N^c_{ab} = \Phi^s_b(\partial_s\Phi^c_a - \partial_a\Phi^c_s) - \Phi^s_a(\partial_s\Phi^c_b - \partial_b\Phi^c_s) + \eta_b\partial_a\xi^c - \eta_a\partial_b\xi^c.$$

Этот тензор также называется *тензором кручения* почти контактной структуры.

Почти контактная метрическая структура называется *нормальной*, если тензор Нейенхейса его структурного эндоморфизма удовлетворяет условию $N_\Phi + 2d\eta \otimes \xi = 0$.

Понятие нормальности тесно связано с понятием интегрируемости структуры.

Сасакиевой структурой называется нормальная контактная метрическая структура.

Этот класс почти контактных метрических структур является одним из наиболее хорошо изученных. Сасакиевы структуры внутренним образом индуцируются на вещественных вполне омбилических подмногообразиях келеровых многообразий. В частности, классическим примером многообразия Сасаки является вещественная гиперсфера пространства $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$, снабженного канонической келеровой структурой.

Почти контактное метрическое многообразие M является многообразием Сасаки тогда и только тогда, когда выполняется тождество

$$\nabla_X(\Phi)Y = g(X,Y)\xi - \eta(Y)X.$$

Сасакиева структура называется *сасакиевой формой*, если она имеет постоянную φ-секционную кривизну, то есть для любого $X \in \ker\eta$ кривизна в направлении двумерных площадок $\{X, \varphi X\}$ ($\varphi = \Phi|_{\ker\eta}$) постоянна.

Тензор кривизны сасакиевой формы имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} R(XY)Z =& \frac{c+3}{4}(g(Y,Z)X - g(X,Z)Y) + \frac{c-1}{4}(\eta(X)\eta(Z)Y - \\ &- \eta(Y)\eta(Z)X + g(X,Z)\eta(Y)\xi - g(Y,Z)\eta(X)\xi + \\ &+ \Omega(Z,Y)\Phi X - \Omega(Z,X)\Phi Y + 2\Omega(X,Y)\Phi Z, \end{aligned}$$

где c — φ-секционная кривизна.

Пусть $\mathfrak{T} = (\eta, \xi, \Phi, g)$ — почти контактная метрическая структура. Перейдем от нее к новой структуре $\widetilde{\mathfrak{T}} = (\widetilde{\eta}, \widetilde{\xi}, \widetilde{\Phi}, \widetilde{g})$, объекты которой получены следующим образом:

$$\widetilde{\eta} = \alpha\eta, \qquad \widetilde{\xi} = \frac{1}{\alpha}\xi, \qquad \widetilde{\Phi} = \Phi, \qquad \widetilde{g} = \alpha g + \alpha(\alpha-1)\eta\otimes\eta, \tag{3}$$

где α — константа. Переход от структуры $\mathfrak{T}$ к структуре $\widetilde{\mathfrak{T}}$ известен как обобщенное преобразование D-гомотетии (преобразование D-гомотетии при $\alpha > 0$ и преобразование D-инверсии при $\alpha < 0$) [3].

При обобщенном преобразовании D-гомотетии сасакиева структура переходит в сасакиеву структуру, и сасакиева форма постоянной φ-голоморфной секционной кривизны $c = 1$ переходит в сасакиеву форму постоянной φ-голоморфной секционной кривизны $\frac{4}{\alpha} - 3$.

Известно [3], что если многообразие M^{2n+1} — сасакиева пространственная форма φ-голоморфной секционной кривизны c, то оно локально эквивалентно одному из следующих многообразий:

1) при $c > -3$ — нечетномерной сфере, снабженной канонической сасакиевой структурой или структурой, полученной из канонической преобразованием D-гомотетии;

2) при $c = -3$ — нечетномерному пространству $\mathbb{R}^{2n+1}$, снабженному канонической сасакиевой структурой φ-голоморфной секционной кривизны -3;

3) при $c < -3$ — нечетномерной сфере, снабженной структурой, полученной из канонической преобразованием D-инверсии.

Далее в статье индексы принимают значения $a, b, p = 1, \ldots, 2n+1$, $\alpha, \beta = 1, \ldots, n$, и имеют место следующие обозначения $N = 2n+1$, $\widehat{\alpha} = \alpha + n$.

Структурные объекты сасакиевой формы M^{2n+1} постоянной φ-голоморфной секционной кривизны -3 в специальной системе координат имеют вид [4]:

$$\xi = \partial_N, \quad \eta = -\sum_{\alpha=1}^{n} x^{\widehat{\alpha}} dx^{\alpha} + dx^N,$$

$$(g_{ab}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta} + x^{\widehat{\alpha}} x^{\widehat{\beta}} & 0 & -x^{\widehat{\alpha}} \\ 0 & \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta} & 0 \\ -x^{\widehat{\beta}} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\Phi_b^a) = \begin{pmatrix} 0 & \delta_{\beta}^{\alpha} & 0 \\ -\delta_{\beta}^{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & x^{\widehat{\beta}} & 0 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Уравнения (1) для (4) имеют вид:

Для ξ:

$$\partial_N v^a = 0.$$

Для η:

$$\begin{aligned} a = 1, \ldots, n: \quad & -\sum_{\gamma=1}^{n} x^{\widehat{\gamma}} \partial_{\alpha} v^{\gamma} + \partial_{\alpha} v^N = 0, \\ a = n+1, \ldots, 2n: \quad & -\sum_{\gamma=1}^{n} x^{\widehat{\gamma}} \partial_{\widehat{\alpha}} v^{\gamma} + \partial_{\widehat{\alpha}} v^N = 0, \\ a = N: \quad & -\sum_{\gamma=1}^{n} x^{\widehat{\gamma}} \partial_N v^{\gamma} + \partial_N v^N = 0. \end{aligned}$$

Для g:

$$\begin{aligned}
a=1,\dots,n, b=1,\dots,n: &\quad v^{\widehat{\alpha}}x^{\widehat{\beta}}+v^{\widehat{\beta}}x^{\widehat{\alpha}}+\sum_{\gamma=1}^{n}(\frac{1}{2}\delta_{\alpha\gamma}+x^{\widehat{\alpha}}x^{\widehat{\gamma}})\partial_\beta v^\gamma-\\
&-x^{\widehat{\beta}}\partial_\alpha v^N+\sum_{\gamma=1}^{n}(\frac{1}{2}\delta_{\gamma\beta}+x^{\widehat{\gamma}}x^{\widehat{\beta}})\partial_\alpha v^\gamma-x^{\widehat{\alpha}}\partial_\beta v^N=0,\\
a=1,\dots,n, b=n+1,\dots,2n: &\quad \sum_{\gamma=1}^{n}(\frac{1}{2}\delta_{\alpha\gamma}+x^{\widehat{\alpha}}x^{\widehat{\gamma}})\partial_{\widehat{\beta}} v^\gamma+x^{\widehat{\alpha}}\partial_{\widehat{\beta}}v^N+\frac{1}{2}\partial_\alpha v^{\widehat{\beta}}=0,\\
a=1,\dots,n, b=N: &\quad -v^{\widehat{\alpha}}+\sum_{\gamma=1}^{n}(\frac{1}{2}\delta_{\alpha\gamma}+x^{\widehat{\alpha}}x^{\widehat{\gamma}})\partial_N v^\gamma-x^{\widehat{\alpha}}\partial_N v^N-\\
&-\sum_{\gamma=1}^{n}x^{\widehat{\gamma}}\partial_\alpha v^\gamma+\partial_\alpha v^N=0,\\
a=n+1,\dots,2n, b=n+1,\dots,2n: &\quad \partial_{\widehat{\beta}}v^{\widehat{\alpha}}+\partial_{\widehat{\alpha}}v^{\widehat{\beta}}=0,\\
a=n+1,\dots,2n, b=N: &\quad \frac{1}{2}\partial_N v^{\widehat{\alpha}}-\sum_{\gamma=1}^{n}x^{\widehat{\gamma}}\partial_{\widehat{\alpha}}v^\gamma+\partial_{\widehat{\alpha}}v^N=0,\\
a=N, b=N: &\quad -\sum_{\gamma=1}^{n}x^{\widehat{\gamma}}\partial_N v^\gamma+\partial_N v^N=0.
\end{aligned}$$

Для Φ:

$$\begin{aligned}
a=1,\dots,n, b=1,\dots,n: &\quad \partial_\beta v^{\widehat{\alpha}}+\partial_{\widehat{\beta}}v^\alpha=0,\\
a=1,\dots,n, b=n+1,\dots,2n: &\quad \partial_{\widehat{\beta}}v^{\widehat{\alpha}}-\partial_\beta v^\alpha-x^{\widehat{\beta}}\partial_N v^\alpha=0,\\
a=1,\dots,n, b=N: &\quad \partial_N v^{\widehat{\alpha}}=0,\\
a=n+1,\dots,2n, b=1,\dots,n: &\quad -\partial_\beta v^\alpha+\partial_{\widehat{\beta}}v^{\widehat{\alpha}}=0,\\
a=n+1,\dots,2n, b=n+1,\dots,2n: &\quad -\partial_{\widehat{\beta}}v^\alpha-\partial_\beta v^{\widehat{\alpha}}-x^{\widehat{\beta}}\partial_N v^{\widehat{\alpha}}=0,\\
a=n+1,\dots,2n, b=N: &\quad -\partial_N v^\alpha=0,\\
a=N, b=1,\dots,n: &\quad \sum_{\gamma=1}^{n}x^{\widehat{\gamma}}\partial_\beta v^{\widehat{\gamma}}+\partial_{\widehat{\beta}}v^N=0,\\
a=N, b=n+1,\dots,2n: &\quad v^{\widehat{\beta}}+\sum_{\gamma=1}^{n}x^{\widehat{\gamma}}\partial_{\widehat{\beta}}v^{\widehat{\gamma}}-\partial_\beta v^N-x^{\widehat{\beta}}\partial_N v^N=0,\\
a=N, b=N: &\quad x^{\widehat{\gamma}}\partial_N v^{\widehat{\gamma}}=0.
\end{aligned}$$

Объединяя полученные уравнения в одну систему и проведя очевидные преобразования получим следующую систему дифференциальных

уравнений в частных производных:

$$
\begin{aligned}
&\partial_N v^a = 0,\\
&-\sum_{\gamma=1}^{n} x^{\widehat{\gamma}}\partial_\alpha v^\gamma + \partial_\alpha v^N = 0,\\
&-\sum_{\gamma=1}^{n} x^{\widehat{\gamma}}\partial_{\widehat{\alpha}} v^\gamma + \partial_{\widehat{\alpha}} v^N = 0,\\
&v^{\widehat{\alpha}}x^{\widehat{\beta}} + v^{\widehat{\beta}}x^{\widehat{\alpha}} + \sum_{\gamma=1}^{n}(\frac{1}{2}\delta_{\alpha\gamma} + x^{\widehat{\alpha}}x^{\widehat{\gamma}})\partial_\beta v^\gamma -\\
&-x^{\widehat{\beta}}\partial_\alpha v^N + \sum_{\gamma=1}^{n}(\frac{1}{2}\delta_{\gamma\beta} + x^{\widehat{\gamma}}x^{\widehat{\beta}})\partial_\alpha v^\gamma - x^{\widehat{\alpha}}\partial_\beta v^N = 0,\\
&\sum_{\gamma=1}^{n}(\frac{1}{2}\delta_{\alpha\gamma} + x^{\widehat{\alpha}}x^{\widehat{\gamma}})\partial_{\widehat{\beta}} v^\gamma + x^{\widehat{\alpha}}\partial_{\widehat{\beta}} v^N + \frac{1}{2}\partial_\alpha v^{\widehat{\beta}} = 0,\\
&-v^{\widehat{\alpha}} - \sum_{\gamma=1}^{n} x^{\widehat{\gamma}}\partial_\alpha v^\gamma + \partial_\alpha v^N = 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\partial_{\widehat{\beta}} v^{\widehat{\alpha}} + \partial_{\widehat{\alpha}} v^{\widehat{\beta}} = 0,\\
&-\sum_{\gamma=1}^{n} x^{\widehat{\gamma}}\partial_{\widehat{\alpha}} v^\gamma + \partial_{\widehat{\alpha}} v^N = 0,\\
&\partial_\beta v^{\widehat{\alpha}} + \partial_{\widehat{\beta}} v^\alpha = 0,\\
&-\partial_\beta v^\alpha + \partial_{\widehat{\beta}} v^{\widehat{\alpha}} = 0,\\
&\sum_{\gamma=1}^{n} x^{\widehat{\gamma}}\partial_\beta v^{\widehat{\gamma}} + \partial_{\widehat{\beta}} v^N = 0,\\
&v^{\widehat{\beta}} + \sum_{\gamma=1}^{n} x^{\widehat{\gamma}}\partial_{\widehat{\beta}} v^{\widehat{\gamma}} - \partial_\beta v^N = 0.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Из дифференциальных следствий этой системы легко получить, что

$$
\partial_N v^a = 0, \quad \partial_{ab} v^\alpha = 0, \quad \partial_{ab} v^{\widehat{\alpha}} = 0, \quad \partial_{abc} v^N = 0,
$$

в силу чего неизвестные функции $v^a(x^1, \ldots, x^{2n}, x^N)$ можно представить в виде

$$
\begin{cases}
v^\alpha = C_0^\alpha + C_\beta^\alpha x^\beta + C_{\widehat{\beta}}^\alpha x^{\widehat{\beta}},\\
v^{\widehat{\alpha}} = C_0^{\widehat{\alpha}} + C_\beta^{\widehat{\alpha}} x^\beta + C_{\widehat{\beta}}^{\widehat{\alpha}} x^{\widehat{\beta}},\\
v^N = C_0^N + C_\alpha^N x^\alpha + C_{\widehat{\alpha}}^N x^{\widehat{\alpha}} + C_{\alpha\beta}^N x^\alpha x_\beta + C_{\alpha\widehat{\beta}}^N x^\alpha x^{\widehat{\beta}} + C_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}^N x^{\widehat{\alpha}} x^{\widehat{\beta}}.
\end{cases}
\tag{6}
$$

Подставив (6) в (5) получим условия на C_a, C_{ab}:

$$\begin{gathered} C^{\alpha}_{\beta} = -C^{\beta}_{\alpha}, \quad C^{\widehat{\alpha}}_{\widehat{\beta}} = -C^{\widehat{\beta}}_{\widehat{\alpha}}, \quad C^{\alpha}_{\beta} = -C^{\widehat{\beta}}_{\widehat{\alpha}}, \\ C^{N}_{\alpha\beta} = C^{\widehat{\alpha}}_{\beta}, \quad C^{N}_{\alpha\alpha} = \frac{1}{2} C^{\widehat{\alpha}}_{\alpha}, \quad C^{N}_{\alpha\widehat{\beta}} = 0 \\ C^{N}_{\alpha\beta} = -C^{N}_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}, \quad C^{N}_{\alpha} = C^{\widehat{\alpha}}_{0}. \end{gathered} \tag{7}$$

С учетом (7) функции (6) будут иметь вид

$$\begin{cases} v^{\alpha} = C^{\alpha}_{0} + C^{\alpha}_{\beta} x^{\beta} + C^{\alpha}_{\widehat{\beta}} x^{\widehat{\beta}}, \\ v^{\widehat{\alpha}} = C^{\widehat{\alpha}}_{0} - C^{\alpha}_{\widehat{\beta}} x^{\beta} + C^{\alpha}_{\beta} x^{\widehat{\beta}}, \\ v^{N} = C^{N}_{0} + C^{\widehat{\alpha}}_{0} x^{\alpha} + C^{\widehat{\alpha}}_{\beta} x^{\alpha} x^{\beta} - C^{\widehat{\alpha}}_{\beta} x^{\widehat{\alpha}} x^{\widehat{\beta}}, \end{cases} \tag{8}$$

и, следовательно, справедлива

Теорема 2 *Базисные операторы алгебры Ли инфинитезимальных автоморфизмов сасакиевой формы постоянной φ-голоморфной секционной кривизны -3 в специальной системе координат имеют вид*

$$\begin{gathered} \partial_{\alpha}, \qquad \partial_{N}, \qquad \partial_{\widehat{\alpha}} + x^{\alpha}\partial_{N}, \\ x^{\alpha}\partial_{\widehat{\beta}} + x^{\beta}\partial_{\widehat{\alpha}} - x^{\widehat{\alpha}}\partial_{\beta} - x^{\widehat{\beta}}\partial_{\alpha} + (x^{\alpha}x^{\beta} - x^{\widehat{\alpha}}x^{\widehat{\beta}})\partial_{N} \quad \alpha \leq \beta, \\ -x^{\beta}\partial_{\alpha} + x^{\alpha}\partial_{\beta} - x^{\widehat{\beta}}\partial_{\widehat{\alpha}} - x^{\widehat{\alpha}}\partial_{\widehat{\beta}} \quad \alpha < \beta. \end{gathered} \tag{9}$$

Список литературы

1. Кириченко В.Ф. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. М.: МПГУ, 2003. 495 с.
2. Tanno Shukichi The automorphism groups of almost contact riemannian manifolds. // Tohoku Math. J., 1969, 21, 1, pp. 21–38
3. Кириченко В.Ф., Борисовский И.П. Интегральные многообразия контактных распределений. // Мат. сб. - 1998. - 189, N12. - С. 119–134.
4. Blair David E. Contact manifolds in Riemannian geometry. // Leet. Notes Math., 1976, 509, 146 pp.

Н. А. Тяпин

Пензенский государственный педагогический университет им. В. Г. Белинского, Пенза, Россия

E-mail: tyapin_nikita@mail.ru