Один из способов обоснования вида наблюдаемых квантовой механики

Е. М. Бениаминов
email: beni@rsuh.ru

Вводятся некоторые предположения о процессе наблюдения квантовых явлений, включая введение скрытых параметров, действие группы движения в области скрытых параметров и усреднения наблюдений за счет малых случайных (диффузионных) движений объекта наблюдения. Исходя из этих предположений показывается, что значения наблюдений классической наблюдаемой величины соответствуют спектру некоторого линейного оператора. В работе найдено выражение этого оператора для любой наблюдаемой (функции от координат и импульсов) в зависимости от отношения a/b коэффициентов диффузии по координатам a и импульсам b. Показывается, что обычный линейный оператор квантовой наблюдаемой не совпадает с построенным в данной работе и отличается сглаживанием функции потенциальной энергии по нормальному распределению с нормальным отклонением, равным $\hbar a/2b$. Предполагая, что эта разница вызывает сдвиг спектра атома водорода, наблюдаемый в эксперименте Лэмба, дается оценка величины a/b. Кроме того, предлагаемый подход позволяет выразить распределение вероятностей в фазовом пространстве, соответствующее волновой функции квантовой системы.

"Только теория говорит нам,
что же мы наблюдаем в эксперименте"
А.Эйнштейн

1 Введение

В данной статье рассматривается математическая модель процесса наблюдения микрообъекта. Модель основана на некоторых конструкциях геометрического квантования [1] и предположения, что микрообъекты подвержены флуктуирующим воздействиям внешней среды, например флуктуациям вакуума. Показывается, что расширение фазового пространства, некоторое расширение группы движений на нем, а также учет диффузионных движений в расширенном пространстве приводят к наблюдению квантовых эффектов. Показывается также, что обычные нерелятивистские описания квантовых систем могут рассматриваться лишь как асимптотическое приближение по постоянной Планка к предлагаемой в данной работе модели. Оценки параметров построенной в статье модели проводятся исходя из экспериментальных данных Лэмба [2] о сдвигах в спектре атома водорода. Эти сдвиги в спектре атома водорода первоначально объяснялись флуктуациями вакуума, а затем в квантовой электродинамике поляризацией вакуума вокруг точечного заряда (радиационными поправками).

Предлагаемая в статье модель, с одной стороны, может быть использована для моделирования квантовых эффектов, с другой стороны, приводит к еще одной конструкции квантования механических систем, которая может оказаться полезной для особых случаев квантования.

Обычно, описание квантовых систем строится путем использования некоторых формальных процедур квантования, исходя из классического описания соответствующих механических систем. Поиски смысла этих процедур привлекали многих физиков, начиная с А. Эйнштейна, но быстрый успех применения квантовой механики стимулировал к получению результатов, исходя из формальных методов. С другой стороны, теорема фон Неймана "о скрытых параметрах" [3], как бы закрывая тему о классическом объяснении квантовых эффектов, приостановила исследования по обоснованию процедур квантовой механики.

Научный интерес к этой теме возрождается в 50-х годах в связи с работами Д. Бома, Л. де Бройля [4] и поддерживается в ряде более поздних публикаций (см. например, [5]). Тогда же была понята жесткость и физическая необоснованность математических требований в теореме фон Неймана [6].

Подробный анализ проблемы введения скрытых параметров в квантовую механику и анализ теоремы фон Неймана дан в [7] . В частности в [7] приведена некоторая формальная модель со скрытыми параметрами для "уединенной" квантовой системы. Трудность введения классической вероятностной модели для квантовых явлений связывается с не локальностью этих явлений, которая подтверждается рядом экспериментов. В [8] приведен обзор работ в этой области.

В настоящей работе предлагается рассматривать амплитуды вероятности на расширенном фазовом пространстве, включающем пространство внутренних состояний системы, которое в каждом эксперименте, вообще говоря, может быть свое. Предполагается, что в экспериментах над квантовыми системами с классическими приборами наблюдаются лишь распределения вероятностей, соответствующие усредненным амплитудам вероятностей. Предполагается также, что усреднение получается в результате довольно быстрого процесса, вызванного флуктуирующими действиями на квантовую систему. Показывается, что в приведенной модели усредненные амплитуды вероятностей на фазовом пространстве параметризуются комплексными функциями на конфигурационном пространстве, то есть волновыми функциями. В частности, в этой модели получена формула (8), выражающая для волновой функции распределение вероятностей в фазовом пространстве. Впервые такая задача решалась Вигнером [9] , но он получил, так называемые, квазираспределения в фазовом пространстве, которые в некоторых случаях могут быть отрицательными и, поэтому, лишенными физического смысла.

В разделе 2 приводятся основные предположения о квантовых наблюдениях и постановка основной задачи статьи. Описание действия расширенной группы движений в расширенном фазовом пространстве дается в разделе 3. Предположения об операции усреднения и теорема о виде усредненных распределений в расширенном фазовом пространстве сформулированы в разделе 4. В разделе 5 доказывается основной результат статьи об асимптотической близости линейных операторов, полученных на основании рассмотренной здесь модели, и линейных операторов квантовых наблюдаемых. В разделе 6 перечисляются нерешенные вопросы и направления дальнейших исследований. Доказательство теоремы о виде усредненных распределений в расширенном фазовом пространстве и оценка параметров модели по экспериментальным данным сдвига спектра атома водорода вынесены в приложение.

2 Основные предположения и постановка задачи

Рассматривается случай плоского конфигурационного пространства.

Пусть R^{2n} — фазовое пространство, элементы которого будут обозначаться через (q,p), где $q=(q_1,...,q_n)$ — координаты конфигурационного пространства, представляющего собой n-мерное евклидово пространство R^n, а $p=(p_1,...,p_n)$ — координаты импульса. В классической механике координаты и импульсы связаны внешней дифференциальной формой $\Omega=\sum_{i=1}^n dq_i\wedge dp_i$.

Каноническими преобразованиями g фазового пространства R^{2n} называются гладкие взаимно однозначные отображения $g:R^{2n}\to R^{2n}$, сохраняющие форму Ω. Через S обозначим группу всех канонических преобразований фазового пространства R^{2n}. Динамика механической системы задается однопараметрической подгруппой канонических преобразований g_t.

С наблюдаемыми механической системы связываются действительные функции $f(q,p)$ на фазовом пространстве, а с состояниями — неотрицательные распределения $\rho(q,p)dqdp$. Средним значением наблюдаемой f в состоянии ρ называется число $\int_{R^{2n}} f(q,p)\rho(q,p)dqdp$, которое обозначается через $\langle f,\rho\rangle$.

Для квантовой системы, рассматриваемой на фазовом пространстве R^{2n}, мы будем исходить из следующих предположений:

i1). Фазовое пространство системы R^{2n} расширяется до пространства $E=R^{2n}\times F$, где F — некоторое многообразие внутренних состояний системы. Через $\pi:E\to R^{2n}$ обозначается отображение проекции декартова произведения $R^{2n}\times F=E$ на первый сомножитель.

i2). Действие группы канонических преобразований S поднимается с R^{2n} на расслоение E, то есть существуют группа гладких преобразований S' пространства E вместе с эпиморфизмом $\alpha : S' \to S$ такие, что для любого $g' \in S'$ коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{g'} & E \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ R^{2n} & \xrightarrow{\alpha(g')} & R^{2n}. \end{array}$$

i3). Наблюдаемые квантовой системы, так же как и классической, задаются функциями $f(q,p)$ на фазовом пространстве R^{2n}.

Пусть $\rho(q,p,\xi)dqdpd\xi$ — неотрицательное распределение на E, заданное плотностью распределения $\rho(q,p,\xi)$, где $\xi\in F$, и мерой $dqdpd\xi$ на E, которая будет предполагаться инвариантной относительно действия группы S'. Функция $\rho(q,p,\xi)$ может быть представлена в виде $\rho(q,p,\xi) = \varphi^2(q,p,\xi)$, где $\varphi(q,p,\xi)$ — также некоторая функция на E, обладающая свойством $\int_F \varphi(q,p,\xi)d\xi = 0$. Обозначим через $\tilde{\rho}(q,p,\xi) = \tilde{\varphi}^2(q,p,\xi)$ некоторую усредненную плотность распределения, полученную из $\rho(q,p,\xi)$ за счет малых флуктуаций системы на E (математическая модель процесса усреднения будет дана в разделе 4).

i4). В квантовой системе при измерениях реализуются лишь усредненные плотности распределения вида $\tilde{\rho}(q,p,\xi) = \tilde{\varphi}^2(q,p,\xi)$. Соответствие $\varphi \mapsto \tilde{\varphi}$ является линейным проектором, вид которого будет дан в разделе 4 (см. i4').

i5). В экспериментах с квантовой системой получают средние значения наблюдаемых $f(q,p)$, равные

$$\langle f, \tilde{\rho}\rangle = \int_E f(q,p)\tilde{\rho}(q,p,\xi)dqdpd\xi = \int_E f\tilde{\varphi}^2 dqdpd\xi,$$

где $\tilde{\rho}(q,p,\xi)$ — усредненные плотности распределения на E.

Рассмотрим линейное пространство усредненных функций вида $\tilde{\varphi}(q,p,\xi)$ на E, пополненное до гильбертова пространства $\mathbf{H}_{\tilde{\varphi}}$ относительно стандартного скалярного произведения $\langle\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2\rangle = \int_E \tilde{\varphi}_1\tilde{\varphi}_2 dqdpd\xi$. Сопоставим функции $f(q,p)$ линейный оператор A_f в пространстве $\mathbf{H}_{\tilde{\varphi}}$, который задается соотношением:

$$\langle \tilde{\varphi}, A_f \tilde{\varphi} \rangle = \langle f, \tilde{\varphi}^2 \rangle.$$

Основным результатом данной статьи является доказательство того, что при некоторых предположениях о группе S' и ее действии на E, операторы A_f приближенно (с точностью до членов порядка h, где h — постоянная Планка) совпадают с операторами квантовых наблюдаемых, принятыми в стандартном определении квантовой механики.

3 Описание группы S' и ее действия на расширенном пространстве состояний

В качестве группы S', действующей на $E = R^{2n} \times F$ рассматривается нетривиальное центральное расширение группы канонических преобразований S фазового пространства R^{2n} с помощью одномерной группы вращений $T = R/hZ$, где R — группа вещественных чисел, Z — подгруппа целых чисел, а h — некоторое число. То есть группа S' включается в точную последовательностью групп

$$1 \longrightarrow T \longrightarrow S' \longrightarrow S \longrightarrow 1,$$

точная последовательность алгебр Ли которых имеет вид

$$0 \longrightarrow R \longrightarrow \mathcal{S}' \longrightarrow \mathcal{S} \longrightarrow 1,$$

где $\mathcal{S}$ — алгебра Ли интегрируемых гамильтоновых векторных полей на R^{2n}, и $\mathcal{S}'$ — алгебра Пуассона [10] функций $H(p,q)$ на R^{2n}, которые задают интегрируемые гамильтоновы векторные поля вида $\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i}$ (здесь по повторяющимся индексам предполагается суммирование). Действительные числа R вкладываются в $\mathcal{S}'$ в виде постоянных функций.

Два расслоения $E = R^{2n} \times F$ и $E' = R^{2n} \times F'$ над R^{2n}, на которых действует группа S' согласованно с действием группы S на R^{2n}, называются эквивалентными, если найдется гладкое взаимно однозначное отображение расслоений $E \to E'$ над R^{2n}, согласованное с действием группы $S.'$

Имеется теорема о классификации S' — расслоений над R^{2n} с точностью до эквивалентности. Для формулировки этой теоремы нужно несколько подробнее рассмотреть структуру слоя в расслоении E.

Обозначим через S_0 подгруппу всех канонических преобразований, оставляющих точку начала координат $(0,0) \in R^{2n}$ неподвижной, а через S'_0 подгруппу в S', равную $\alpha^{-1}(S_0)$. Из анализа алгебры Ли группы S'_0 следует, что $S' = T \oplus S_0$.

Так как подгруппа $S'_0 \subset S'$ действует на E и переводит слой F над точкой $(0,0)$ в себя, то, тем самым, определено действие группы в слое F. В частности, в слое F действует однопараметрическая группа $T \subset S'_0$.

Т е о р е м а 1. *Расслоение $E = R^{2n} \times F$ с непрерывным гладким действием на нем группы S', которая действует согласованно с действие группы S на R^{2n}, однозначно с точностью до эквивалентности S'-расслоений определяется S'_0-пространством F.*

Действие группы S' на E гладкими преобразованиями определяет стандартным образом сопоставление $H \mapsto \eta_H$: каждому элементу $H \in \mathcal{S}'$ алгебры Ли этой группы — векторное поле η_H на E. Поле η_H строится как производная действия на E однопараметрической подгруппы G_t^H, определенной элементом H алгебр Ли $\mathcal{S}'$, по параметру t, при $t = 0$.

Обозначим через χ_1, векторное поле на F, соответствующее действию однопараметрической группы T_t на E, которое также определяется как производная действия одномерной группы вращений $T = T_t$ по параметру t при значении параметра, равным нулю.

Т е о р е м а 2. *В любом S' - расслоении $E = R^{2n} \times F$ можно так выбрать тривиализацию расслоения, что векторные поля на E, сопоставляемые линейным функциям H от q и p вида $H = c + \sum_{i=1}^{n}(x_i p_i - y_i q_i) \in \mathcal{S}'$ задаются в координатах $(q,p,\xi) \in R^{2n} \times F$ следующим выражением:*

$$\eta_H = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i \frac{\partial}{\partial q_i} + y_i \frac{\partial}{\partial p_i} \right) + \left(c - \sum_{i=1}^{n} y_i q_i \right) \chi_1.$$

В эквивалентной интегральной форме это означает, что для произвольной функции $\varphi(q,p,\xi)$ на E действие однопараметрических групп G_t^H для указанных выше $H \in \mathcal{S}'$ в рассматриваемой тривиализации задается выражением:

$$G_t^H \varphi(q,p,\xi) = \varphi(q + tx, p + ty, T_{t(c - \langle y,q \rangle)}(\xi)),$$

где $\langle y, q\rangle = \sum_{i=1}^{n} y_i q_i$.

Доказательства теорем 1 и 2 носят чисто технический характер и поэтому в данном тексте не приводятся.

Для сокращения последующих записей введем обозначение $W_t^{x,y} = G_t^H$, где $H = \langle xp\rangle - \langle yq\rangle$. Однопараметрические подгруппы $W_t^{x,y}$ действуют на функции $\varphi(q, p, \xi)$ в соответствии с предыдущей формулой. Обозначим через W подгруппу в S', порожденную однопараметрическими подгруппами $W_t^{x,y}$ для $(x, y) \in R^{2n}$. Очевидно, что подгруппа W равна прообразу $\alpha^{-1}(R^{2n})$ относительно гомоморфизма $\alpha : S' \to S$, где R^{2n} — группа параллельных переносов на пространстве R^{2n}, рассматриваемая как подгруппа S. Группа W обычно называется группой Вейля-Гейзенберга.

4 Операция усреднения

Перейдем к определению операции усреднения функций $\varphi(q, p, \xi)$ на S'-расслоении E, используемой в предположении i4.

Будем исходить из того, что усреднение $\varphi \mapsto \tilde{\varphi}$ связано с диффузионным процессом (броуновским движением) на S'-расслоении, которое вызывается неточностью установки прибора наблюдения относительно наблюдаемой системы. Этот процесс действует малыми сдвигами на Δq и Δp по координатам q и p пространства R^{2n}, а на всем расслоении E в соответствии с действием однопараметрических подгрупп $W_t^{\Delta q, \Delta p}$, при $t = 1$.

Более точно это значит, что функция $\varphi(q, p, \xi)$ в результате диффузионного процесса меняется по времени диффузии τ так, что $\varphi(\tau, q, p, \xi)$ равна $\varphi(q, p, \xi)$ при $\tau = 0$, и за малое приращение времени диффузии $\Delta\tau$ изменение функции, по аналогии с обычным процессом диффузии (см., например [11]), происходит по следующему правилу:

$$\begin{aligned}\varphi(\tau + \Delta\tau, q, p, \xi) \;\; = & \int\limits_{R^{2n}} K(\Delta q, \Delta p, \Delta\tau) \times \\ & \times W_1^{\Delta q, \Delta p} \varphi(\tau, q, p, \xi) d(\Delta q) d(\Delta p) + o(\Delta\tau), \qquad (1)\end{aligned}$$

где $K(\Delta q, \Delta p, \Delta\tau)$ — плотность вероятности сдвигов на вектор $(\Delta q, \Delta p)$ за время $\Delta\tau$.

При этом относительно распределения вероятностей сдвигов делаются обычные для броуновского движения предположения:

плотность распределения $K(\Delta q, \Delta p, \Delta\tau)$ — функция, быстро убывающая по Δq и Δp на бесконечности;

математическое ожидание вектора сдвигов $(\Delta q, \Delta p)$ равно нулю;

диагональные элементы матрицы моментов второго порядка имеют вид:

$$\int_{R^{2n}} (\Delta q_i)^2 K(\Delta q, \Delta p, \Delta\tau) d(\Delta q) d(\Delta p) = 2a_i^2 \Delta\tau + o(\Delta\tau),$$

$$\int_{R^{2n}} (\Delta p_i)^2 K(\Delta q, \Delta p, \Delta\tau) d(\Delta q) d(\Delta p) = 2b_i^2 \Delta\tau + o(\Delta\tau),$$

где величины a_i и b_i характеризуют интенсивности сдвигов по координатам q_i и импульсам p_i;

сдвиги по различным направлениям слабо зависимы между собой, то есть остальные моменты второго порядка представляют собой величины порядка $o(\Delta\tau)$;

моменты от плотности распределения $K(\Delta q, \Delta p, \Delta\tau)$ порядка больше двух также представляют собой величины порядка $o(\Delta\tau)$.

Исходя из уравнения (1) и сделанных предположений о плотности распределений $K(\Delta q, \Delta p, \Delta\tau)$, разложением функции $\varphi(\tau, q, p, \xi)$ в ряд Тейлора можно получить в пределе при $\Delta\tau \to 0$ дифференциальное уравнение, аналогичное уравнению диффузии, представляющее процесс усреднения функции φ за счет флуктуаций. Асимптотика решений этого уравнения при $\tau \to \infty$ описывается следующей теоремой.

Теорема 3. *Пусть функция $\varphi(\tau, q, p, \xi)$ удовлетворяет уравнению (1), где $K(\Delta q, \Delta p, \Delta\tau)$ — плотность вероятностей сдвигов, обладающая перечисленными выше свойствами, и $\varphi(0, q, p, \xi) = \varphi(q, p, \xi)$ — функция , для которой $\int_0^h \varphi(q, p, T_t(\xi)) dt = 0$. Тогда функция $\varphi(\tau, q, p, \xi)$ при $\tau \to \infty$ асимптотически стремится к функции*

$$\tilde{\varphi}(q, p, \xi) \exp\left(-\tau \sum_{i=1}^{n} \frac{2\pi a_i b_i}{h}\right), \qquad (2)$$

где функция $\tilde{\varphi}(q, p, \xi)$ имеет вид:

$$\tilde{\varphi}(q, p, \xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{2}{h^3}\right)^{\frac{n}{4}} \left(\frac{b_1 \ldots b_n}{a_1 \ldots a_n}\right)^{\frac{1}{4}} \int_{R^n} \exp\left(-\frac{\pi}{h} \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{a_i} (q_i - x_i)^2\right) \times$$

$$\times\ \left(\psi(x,\xi)\exp\left(-j\frac{2\pi\langle p,x\rangle}{h}\right)+\psi^*(x,\xi)\exp\left(j\frac{2\pi\langle p,x\rangle}{h}\right)\right)dx, \quad (3)$$

В последней формуле через j обозначена мнимая единица, через $*$ — операция комплексного сопряжения, и $\psi(x,\xi)$ — комплекснозначная функция на $R^n \times F$, обладающая свойством:

$$\psi(x,T_t(\xi))=\psi(x,\xi)\exp\left(-j\frac{2\pi}{h}t\right). \quad (4)$$

Причем функция $\psi(x,\xi)$ получается из функции $\varphi(q,p,\xi)$ по следующей формуле:

$$\begin{aligned}\psi(x,\xi) \ =\ & \sqrt{2}\left(\frac{1}{h}\right)\left(\frac{2}{h^3}\right)^{\frac{n}{4}}\left(\frac{b_1...b_n}{a_1...a_n}\right)^{\frac{1}{4}}\int_{R^{2n+1}}\varphi\left(q,p,T_t(\xi)\right)\exp\left(j\frac{2\pi t}{h}\right)\times\\ &\times\exp\left(-\frac{\pi}{h}\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{a_i}\left(q_i-x_i\right)^2\right)\exp\left(j\frac{2\pi\langle p,x\rangle}{h}\right)dqdpdt. \quad (5)\end{aligned}$$

Кроме того, если $\psi(x,\xi)$ — произвольная комплекснозначная функция, удовлетворяющая условию (4), то композиция отображений $\psi \mapsto \tilde{\varphi}$ и $\tilde{\varphi} \mapsto \psi$, заданных соответственно формулами (3) и (5), является тождественным сопоставлением $\psi \mapsto \psi$.

Доказательство теоремы приведено в приложении.

Теперь мы готовы к тому, чтобы уточнить предположение i4, приведенное в разделе 2.

i4'). Рассматриваются представления плотности вероятностей в фазовом пространстве в виде $\rho(q,p,\xi)=\varphi^2(q,p,\xi)$, где $\varphi^2(q,p,\xi)$ — действительная функция на E, для которой предполагается верным равенство $\int_0^h\varphi(q,p,T_t(\xi))dt=0$. Операция усреднения $\varphi\mapsto\tilde{\varphi}$, указанная в предположении i4, вызывается процессом флуктуирующего воздействия на систему, которое описывается уравнением (1). При этом φ — начальное состояние процесса, а $\tilde{\varphi}$ — асимптотическое состояние при времени флуктуации, стремящемся к бесконечности. Как следствие этого предположения, формула соответствия $\varphi\mapsto\tilde{\varphi}$ получается (по теореме 3) композицией соответствий $\varphi\mapsto\psi$ и $\varphi\mapsto\tilde{\varphi}$, заданных формулами (5) и (3) теоремы 3.

Рассмотрим гильбертово пространство $\mathbf{H}_{\tilde{\varphi}}$ действительных функций $\tilde{\varphi}(q,p,\xi)$ на $E = R^{2n} \times F$ вида (3) со стандартным скалярным произведением $\langle \tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2 \rangle_{H\tilde{\varphi}} = \int_E \tilde{\varphi}_1 \tilde{\varphi}_2 dqdpd\xi$. Через $\mathbf{H}_\psi$ обозначим гильбертово пространство комплекснозначных функций $\psi(x,\xi)$ на $R^n \times F$, удовлетворяющих условию (4). Причем скалярное произведение в пространстве $\mathbf{H}_\psi$ выражается формулой:

$$\langle \psi_1, \psi_2 \rangle_{H\psi} = Re \int_{R^n \times F} \psi_1(x,\xi) \psi_2^*(x,\xi) dx d\xi,$$

где Re — операция выделения действительной части у комплексного числа.

Используя теорему 3, непосредственными расчетами нетрудно доказать следующее утверждение.

С л е д с т в и е *Сопоставление $\psi \mapsto \tilde{\varphi}$, заданное формулой (3), представляет собой изоморфизм гильбертовых пространств $\mathbf{H}_\psi$ и $\mathbf{H}_{\tilde{\varphi}}$.*

Функцию $\psi(x,\xi)$, удовлетворяющую условию (4), будем называть волновой функцией, а соответствующую ей функцию $\tilde{\varphi}(q,p,\xi)$ — амплитудой вероятностей в расширенном фазовом пространстве.

З а м е ч а н и е. Выражение (3) задает, так называемое, координатное представление функции $\tilde{\varphi}$. Если выразить $\psi(x,\xi)$ через ее преобразование Фурье по x и подставить в (3), то мы получим импульсное представление $\tilde{\varphi}$. Однако импульсное представление нам в этой работе не понадобится, поэтому оно здесь не приводится.

5 Оценка оператора наблюдаемой

В этом разделе оценивается оператор A_f на гильбертовом пространстве $\mathbf{H}_{\tilde{\varphi}}$ функций $\tilde{\varphi}$ вида (3). Оператор A_f сопоставляется наблюдаемой $f(q,p)$ и по определению задается следующим выражением:

$$\langle f, \tilde{\rho} \rangle_{H\tilde{\varphi}} = \int_E f(q,p) \tilde{\varphi}^2(q,p,\xi) dqdpd\xi. \tag{6}$$

Так как пространства $\mathbf{H}_{\tilde{\varphi}}$ и $\mathbf{H}_\psi$ согласно следствию изоморфны, то мы можем оценивать оператор A_f (точнее тот оператор, в который он переходит при заданном изоморфизме) в пространстве $\mathbf{H}_\psi$.

Подставим в (6) формулу (3). При этом функцию $\tilde{\varphi}^2 = \left(\int_{R^n} B(x)dx\right)^2$, где $B(x)$ — подынтегральное выражение формулы (3), представим в виде $\tilde{\varphi}^2 = \int_{R^n}\int_{R^n} B(x')B(x)dx'dx$.

Раскрыв в полученном выражении скобки и воспользовавшись тем, что интегралы по ξ от произведений $\psi(x,\xi)\psi(x,\xi)$ и $\psi^*(x,\xi)\psi^*(x,\xi)$, как следует из условия (4), равны нулю, после элементарных преобразований получим:

$$\begin{aligned}
\langle\psi, A_f\psi\rangle_{H\psi} \;=\; & \left(\frac{2}{h^3}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{b_1 ... b_n}{a_1 ... a_n}\right)^{\frac{1}{2}} \int\limits_{E\times R^{2n}} f(q,p)\,\times \\
& \times \exp\!\left(-\frac{\pi}{h}\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{a_i}\left((q_i - x'_i)^2 + (q_i - x_i)^2\right)\right)\times \\
& \times \psi(x',\xi)\psi^*(x,\xi)\exp\left(-j\frac{2\pi\langle p, x'-x\rangle}{h}\right) dqdpd\xi dx'dx.
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что ядро оператора A_f в пространстве $\mathbf{H}_\psi$ имеет вид:

$$\begin{aligned}
A_f(x,x') \;=\; & \left(\frac{2}{h^3}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{b_1 ... b_n}{a_1 ... a_n}\right)^{\frac{1}{2}} \int\limits_{R^{2n}} f(q,p)\,\times \\
& \times \exp\!\left(-\frac{\pi}{h}\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{a_i}\left((q_i - x'_i)^2 + (q_i - x_i)^2\right)\right) \\
& \times \exp\left(-j\frac{2\pi\langle p, x'-x\rangle}{h}\right) dqdp, \qquad (7)
\end{aligned}$$

а плотность распределения вероятностей $\tilde{\rho}(q,p) = \tilde{\varphi}^2(q,p)$, соответствующая волновой функции $\psi(x,\xi)$, выражается формулой:

$$\begin{aligned}
\tilde{\rho}(q,p) \;=\; & \left(\frac{2}{h^3}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{b_1 ... b_n}{a_1 ... a_n}\right)^{\frac{1}{2}} \int\limits_{R^{2n}}\int\limits_{F} \exp\left(-\frac{\pi}{h}\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{a_i}\left((q_i - x'_i)^2 + (q_i - x_i)^2\right)\right) \\
& \times \psi(x',\xi)\psi^*(x,\xi)\exp\left(-j\frac{2\pi\langle p, x'-x\rangle}{h}\right) dx'dxd\xi. \qquad (8)
\end{aligned}$$

Для того, чтобы представить оператор A_f в некотором принятом для квантовой механики виде (см. [12]), подставим в (7) выражение функции

$f(q,p)$ через ее преобразование Фурье, то есть

$$f(q,p) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{R^{2n}} \hat{f}(u,v) \exp(-j\langle q,v\rangle - j\langle p,u\rangle) dudv,$$

где

$$\hat{f}(u,v) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{R^{2n}} f(q,p) \exp(j\langle q,v\rangle + j\langle p,u\rangle) dqdp.$$

В полученном после подстановки выражении вычисляются, используя стандартные формулы интегралов (преобразований Фурье), сначала интегралы по q, а затем по p и u. В результате, после преобразований получим:

$$\begin{aligned} A_f(x,x') &= \frac{1}{h^n} \int \hat{f}\Big(\frac{2\pi(x-x')}{h}, v\Big) \exp\Big(-\frac{h}{8\pi}\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{a_i}{b_i}v_i^2 + \\ &\quad + \frac{b_i}{a_i}\Big(\frac{2\pi(x_i - x_i')}{h}\Big)^2\Big)\Big) \exp\left(-j\left\langle \frac{x+x'}{2}, v\right\rangle\right) dv \\ &= \frac{1}{h^n} \int_{R^n} \tilde{f}_h\left(\frac{2\pi(x-x')}{h}, v\right) \exp\left(-j\left\langle \frac{x+x'}{2}, v\right\rangle\right) dv, \end{aligned}$$

где

$$\tilde{f}_h(u,v) = \hat{f}(u,v) \exp\left(-\frac{h}{8\pi}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{b_i}v_i^2 + \frac{b_i}{a_i}u_i^2\right)\right).$$

Если вместо функции $\tilde{f}_h(u,v)$ взять ее разложение в ряд Тейлора по h до n-го члена ряда, то мы получим соответствующее асимптотическое представление оператора A_f. В частности, нулевой член разложения дает следующую асимптотику:

$$A_f(x,x') = \frac{1}{h^n} \int_{R^n} \hat{f}\left(\frac{2\pi(x-x')}{h}, v\right) \exp\left(-j\left\langle \frac{x+x'}{2}, v\right\rangle\right) dv.$$

Полученное выражение совпадает с выражением для оператора наблюдаемой в квантовой механике (см. формулу (14) в [12] , в которой через h обозначена величина $h/(2\pi)$). Отсюда следует основной результат статьи.

Т е о р е м а 4. *Пусть A_f — линейный оператор в гильбертовом пространстве $\mathbf{H}_\psi$, который строится на основании предположений i1-i5, i4' о процессе квантового наблюдения по классической наблюдаемой*

$f(q,p)$. Тогда A_f асимптотически приближается по h к обычному (принятому в квантовой механике) оператору квантовой наблюдаемой в координатном представлении.

Если требуется более точная оценка оператора A_f, то можно использовать большее число членов ряда Тейлора в разложении функции $\tilde f_h(u,v)$ по h.

Для некоторых функций $f(q,p)$ оператор A_f в пространстве $\mathbf{H}_\psi$, заданный интегралом (7) вычисляется точно.

Так, используя стандартные формулы для вычисления интегралов в (7), получим:

A_{q_i} — оператор умножения на x_i;

A_{p_i} — дифференциальный оператор $-j\frac{h}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x_i}$;

$A_{q_i^2}$ — оператор умножения на $x_i^2+\frac{ha_i}{4\pi b_i}$;

$A_{p_i^2}$ — оператор $-\frac{h^2}{4\pi^2}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}+\frac{hb_i}{4\pi a_i}$.

Отсюда получаем, что для гамильтониана $f=p^2/(2m)+m\omega^2q^2/2$ — линейного осциллятора с собственной частотой ω, оператор A_f имеет вид:

$$A_f=-\frac{h^2}{8\pi^2 m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{m\omega^2q^2}{2}+\frac{h(b^2+m^2\omega^2a^2)}{8\pi abm}.$$

Таким образом, оператор A_f отличается от оператора Гамильтона линейного осциллятора, принятого в квантовой механике, лишь постоянным слагаемым $h(b^2+m^2\omega^2a^2)/(8\pi abm)$.

В более общем случае, когда функция $f=f(q)$ зависит только от координат, из формулы (7) после интегрирования по p и x' получим, что $A_{f(q)}$ — оператор умножения на функцию $\bar f(x)$, которая имеет следующий вид:

$$\bar f(x)=\left(\frac{2}{h}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{b_1\ldots b_n}{a_1\ldots a_n}\right)^{\frac{1}{2}}\int\limits_{R^n} f(q)\exp\left(-\frac{2\pi}{h}\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{a_i}(q_i-x_i)^2\right)dq.$$

То есть $\bar f(x)$ — функция, которая получается из функции $f(x)$ сверткой с плотностью нормального распределения с дисперсией по координате q_i, равной $ha_i/(4\pi b_i)$.

Отсюда, если $f(q,p)=(p_1^2+p_2^2+p_3^2)/(2m)+V(q_1,q_2,q_3)$, — некоторый гамильтониан, то в предположении, что $a_1=a_2=a_3=a$ и $b_1=b_2=$

$b_3 = b$, получаем следующее выражение оператора A_f:

$$A_f = -\frac{h^2}{8\pi^2 m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right) + \frac{3hb}{4\pi a} + \bar{V}(x_1, x_2, x_3). \tag{9}$$

В частности, пусть $f(q,p)$ — гамильтониан атома водорода, у которого $V(q_1,q_2,q_3) = -e^2/r$, где $r = \sqrt{q_1^2+q_2^2+q_3^2}$, и e — заряд электрона. Тогда оператор A_f отличается от оператора Гамильтона атома водорода квантовой механики константой $3hb/(4\pi a)$, которая несущественна, и сглаженностью кулоновского потенциала. Таким образом, из наших предположений следует, что в экспериментах спектр атома водорода должен отличаться от спектра атома водорода, рассчитанного в квантовой механике, исходя из гамильтониана атома водорода.

Такое несоответствие теоретических и экспериментальных данных было обнаружено в 40-х годах [2]. Оно получило название лэмбовского сдвига уровней атома водорода и, впоследствии было объяснено в квантовой электродинамике взаимодействием электрона с флуктуирующим электромагнитным полем.

Сопоставление этих экспериментальных данных с расчетами методом теории возмущений спектра оператора A_f, заданного формулой (9), где f — гамильтониан атома водорода, дает следующую оценку параметров нашей модели (расчеты приведены в приложении 2). Отношение величин $a/b = 3,41 \cdot 10^4$сек/г, а стандартное отклонение $\Delta q = \sqrt{\frac{ha}{4\pi b}}$ нормального распределения, по которому сглаживаются наблюдаемые, зависящие только от координат, равно $4,24 \cdot 10^{-12}$см. Последняя величина сравнима с величиной $h/(2\pi mc) = 3,8 \cdot 10^{-11}$см — минимальной погрешностью измерения координат электрона (в системе покоя), которая следует из квантовой электродинамики.

6 Направления дальнейших исследований

Одно из естественных направлений развития данного подхода — это учет релятивистских эффектов. В статье построен оператор наблюдаемой A_f по классической наблюдаемой $f(q,p)$ (см. формулу (7)), исходя из предположения, что интенсивности сдвигов a_i и b_i по координатам и импульсам являются константами. Это предположение не согласуется с требованием релятивистской инвариантности. В дальнейшем следовало бы определить зависимость этих величин от импульсов и массы частиц и уточнить формулу усреднения (3).

В качестве группы S' здесь рассматривалось центральное расширение группы канонических преобразование фазового пространства. Для того, чтобы учесть спин частиц интересно было бы обобщить приведенные здесь конструкции на более широкий класс расширений группы канонических преобразований.

Конструкцию интересно было бы распространить и на более общие фазовые пространства. В статье в качестве фазового пространства рассматривалось R^{2n}, то есть, по существу, была построена лишь локальная теория. В такой теории кажется странной фиксированность постоянной h. По всей вероятности, величина постоянной Планка h связана с геометрией фазового пространства.

И, наконец, еще одно интересное направление развития рассмотренного здесь подхода — описание динамики наблюдаемых величин, учитывающей флуктуирующие воздействия внешней среды. Как показано в приложении, время стабилизации (усреднения) под действием флуктуаций определяется величиной $h/(2\pi ab)$. Если эта величина мала, то динамика приближенно может быть описана как совокупность быстрого и медленного движений. Быстрое движение приводит к усреднению амплитуд вероятностей, а медленное определяет движение по усредненным амплитудам. Классическое уравнение Шредингера описывает лишь медленную составляющую движения микрообъекта.

Доказательство теоремы 3. Так как уравнение (1) определяется через действия групп $W_t^{x,y}$ в пространстве функций на E, то для удобства вычислений попытаемся разложить функцию $\varphi(\tau, q, p, \xi)$ в интеграл по неприводимым подпредставлениям группы W, действующей в пространстве всех квадратично интегрируемых функций на E.

Разложение на неприводимые представления удобнее описывать над полем комплексных чисел. Поэтому будем рассматривать действие группы W в пространстве комплекснозначных функций на E.

Разложение на неприводимые будем проводить в два этапа.

Сначала рассмотрим действие группы $T = R/(hZ)$ в пространстве функций на F. Пусть $\varphi(\xi)$ — некоторая функция на F. Рассмотрим функцию $\varphi(T_t(\xi))$ от параметра $t \in R$ и $\xi \in F$. Эта функция периодическая по t с периодом h. Поэтому она раскладывается в ряд Фурье

$$\varphi(T_t(\xi)) = \sum_{k \in Z} \varphi_k(\xi) \exp\left(j \frac{2\pi k t}{h}\right),$$

где

$$\varphi_k(\xi) = \frac{1}{h} \int_t^h \varphi(T_t(\xi)) \exp\left(-j \frac{2\pi k t}{h}\right) dt.$$

В частности, при $t = 0$ получаем равенство $\varphi(\xi) = \sum_{k \in Z} \varphi_k(\xi)$.

Из определения $\varphi_k(\xi)$ следует, что сопоставление $\varphi(\xi) \mapsto \varphi_k(\xi)$ — проектор, и группа T действует на функциях φ_k по формуле:

$$\varphi_k(T_t(\xi)) = \exp\left(j \frac{2\pi k t}{h}\right) \varphi_k(\xi). \tag{П.1}$$

Кроме того, нетрудно видеть, что функции φ_n и φ_k ортогональны, при $n \neq k$.

Если $\varphi(q, p, \xi)$ — функция на S' -расслоении $E = R^{2n} \times F$, то она также представляется в виде:

$$\varphi(q, p, \xi) = \sum_{k \in Z} \varphi_k(q, p, \xi), \tag{П.2}$$

где
$$\varphi_k(q,p,\xi) = \frac{1}{h}\int_t^h \varphi(q,p,T_t(\xi))\exp\left(-j\frac{2\pi k t}{h}\right)dt.$$

Подставив (П.2) в уравнение (1) и учитывая соотношение (П.1), получим в координатах на расслоении E, определяемых теоремой 2, следующие уравнения для каждой компоненты φ_k функции φ :

$$\varphi_k(\tau+\Delta\tau,q,p,\xi) = \int_{R^{2n}} K(\Delta q,\Delta p,\Delta\tau)\varphi(\tau,q+\Delta q,p+\Delta p,\xi)$$
$$\times\exp\left(-j\frac{2\pi k\langle\Delta p,q\rangle}{h}\right)d(\Delta q)d(\Delta p)+o(\Delta\tau). \qquad (\text{П}.3)$$

Для $k=0$ полученное уравнение в пределе при $\Delta\tau$, стремящемся к нулю, стандартным образом (разложением функции в ряд Тейлора) сводится к обычному диффузионному уравнению:

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial\tau} = \sum_{i=1}^n\left(a_i^2\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial q_i^2}+b_i^2\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial p_i^2}\right),$$

а так как по условию теоремы 3 $\varphi_0(0,q,p,\xi)=1/h\int_t^h\varphi(q,p,T_t(\xi))dt=0$, то $\varphi_0(0,q,p,\xi)\equiv 0$.

При $k\neq 0$ разложим функцию $\varphi_k(\tau,q,p,\xi)$ в интеграл Фурье по координатам p, то есть представим функцию $\varphi_k(\tau,q,p,\xi)$ в следующем виде:

$$\varphi_k(\tau,q,p,\xi) = \left(\frac{|k|}{h}\right)^{\frac{n}{2}}\int_{R^n}\hat{\varphi}_k(\tau,q,x,\xi)\exp\left(j\frac{2\pi k\langle p,x\rangle}{h}\right)dx, \qquad (\text{П}.4)$$

где x — n-мерный вектор из векторного пространства, сопряженного пространству импульсов, и

$$\hat{\varphi}_k(\tau,q,x,\xi) = \left(\frac{|k|}{h}\right)^{\frac{n}{2}}\int_{R^n}\varphi_k(\tau,q,p,\xi)\exp\left(-j\frac{2\pi k\langle p,x\rangle}{h}\right)dp. \qquad (\text{П}.5)$$

З а м е ч а н и е. Используя определение действия группы W в пространстве функций на E, описанное в теореме 2, нетрудно проверить, что функции вида $\hat{\varphi}_k(\tau,q,x,\xi)\exp(j2\pi k\langle p,x\rangle/h)$ при фиксированных k,x,ξ образуют инвариантное подпространство.

Так как пространства функций вида $\hat{\varphi}_k(\tau, q, x, \xi) \exp(j2\pi k\langle p, x\rangle/h)$ на E ортогональны друг к другу при разных k, x и инварианты для группы W, то уравнения (П.3) распадаются по этим инвариантным подпространствам в систему уравнений, которые получаются из (П.3) подстановкой вместо $\varphi_k(\tau, q, p, \xi)$ функций $\hat{\varphi}_k(\tau, q, x, \xi) \exp(j2\pi k\langle p, x\rangle/h)$ и делением обеих частей уравнений на общий множитель $\exp(j2\pi k\langle p, x\rangle/h)$.

В результате этих преобразований получаются уравнения:

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}_k(\tau + \Delta\tau, q, x, \xi) &= \int_{R^{2n}} K(\Delta q, \Delta p, \Delta\tau)\hat{\varphi}(\tau, q + \Delta q, x, \xi) \times \\ &\times \exp\left(j\frac{2\pi k\langle\Delta p, x - q\rangle}{h}\right) d(\Delta q) d(\Delta p) + o(\Delta\tau),\end{aligned}$$

которые разложением функции $\hat{\varphi}_k(\tau, q+\Delta q, x, \xi) \exp(j2\pi k\langle\Delta p, x - q\rangle/h)$ в ряд Тейлора по Δq и Δp, а также с использованием перечисленных выше свойств плотности вероятности $K(\Delta q, \Delta p, \Delta\tau)$, преобразуются при $\Delta\tau$, стремящемся к нулю, к виду:

$$\frac{\partial\hat{\varphi}_k}{\partial\tau} = a_i^2\frac{\partial^2\hat{\varphi}_k}{\partial q_i^2} + b_i^2\left(\frac{2\pi k}{h}(x_i - q_i)\right)^2\hat{\varphi}_k, \tag{П.6}$$

где $\hat{\varphi}_k$ — функции, зависящие от τ, q, x, ξ, при $k \in Z$ и $k \neq 0$.

Для исследования полученных уравнений (П.6) рассмотрим соответствующие им задачи на собственные значения:

$$a_i^2\frac{\partial^2\hat{\varphi}_k}{\partial q_i^2} + b_i^2\left(\frac{2\pi k}{h}(x_i - q_i)\right)^2\hat{\varphi}_k = \lambda\hat{\varphi}_k.$$

Это уравнение представляет собой стационарное уравнение Шредингера для гармонических колебаний [12]. При условии, что $\hat{\varphi}_k(q) \to 0$ при $|q| \to \infty$, уравнение имеет дискретный спектр. Собственные значения имеют вид:

$$\lambda_{k,k_1,\ldots,k_n} = -\sum_{i=1}^{n}\frac{2\pi|k|a_i b_i}{h}(2k_i + 1), \tag{П.7}$$

где $k_1, \ldots, k_n$ — целые неотрицательные числа. Соответствующие им собственные функции $\hat{\varphi}_{k,k_1,\ldots,k_n}(q, x)$ представляют собой произведения полиномов Чебышева-Эрмита от $(b_i/a_i)\sqrt{2\pi|k|/h}(q_i - x_i)$ на экспоненту вида $\exp\left(-\pi|k|/h\sum_{i=1}^{n}(b_i/a_i)(q_i - x_i)^2\right)$.

Так как собственные функции $\hat{\varphi}_{k,k_1,...,k_n}(q,x)$ уравнения Шредингера при фиксированных x и k ортогональны между собой и образуют полную систему функций в пространстве квадратично интегрируемых функций от q, то $\hat{\varphi}_k$ может быть представлена в виде ряда:

$$\hat{\varphi}_k(\tau,q,x,\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k_1,...,k_n=0}^{\infty} c_{k,k_1,...,k_n}(\tau,x,\xi)\ \hat{\varphi}_{k,k_1,...,k_n}(q,x), \tag{П.8}$$

где функции

$$c_{k,k_1,...,k_n}(\tau,x,\xi) = \sqrt{2}\int_{R^n} \hat{\varphi}_k(\tau,q,x,\xi)\ \hat{\varphi}_{k,k_1,...,k_n}(q,x)dq.$$

Множитель $1/\sqrt{2}$ перед рядом выбран из соображений удобства последующих выкладок.

В частности, $\lambda_{\pm1,0,...,0} = -\sum_{i=1}^{n} 2\pi a_i b_i/h$ — наибольшее собственное значение достигается на нормированной собственной функции:

$$\hat{\varphi}_{\pm1,0,...,0} = \left(\frac{2}{h}\right)^{\frac{n}{4}} \left(\frac{b_1...b_n}{a_1...a_n}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{\pi}{h}\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{a_i}(q_i-x_i)^2\right), \tag{П.9}$$

и $$c_{\pm1,0,...,0} = \sqrt{2}\left(\frac{2}{h}\right)^{\frac{n}{4}}\left(\frac{b_1...b_n}{a_1...a_n}\right)^{\frac{1}{4}}\int_{R^n}\hat{\varphi}_{\pm1}\ \exp\left(-\frac{\pi}{h}\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{a_i}(q_i-x_i)^2\right)dq.$$

Вернемся теперь к нестационарным уравнениям (П.6). Подставив в них выражения функций $\hat{\varphi}_k$ в виде (П.8) и учитывая, что $\hat{\varphi}_{k,k_1,...,k_n}(q,x)$ — собственные функции правой части уравнения, получим уравнения

$$\sum_{k_1,...,k_n=0}^{\infty}\frac{\partial c_{k,k_1,...,k_n}}{\partial\tau}\hat{\varphi}_{k,k_1,...,k_n} = \sum_{k_1,...,k_n=0}^{\infty}\lambda_{k,k_1,...,k_n}\ c_{k,k_1,...,k_n}\ \hat{\varphi}_{k,k_1,...,k_n},$$

которые, ввиду ортогональности функций $\hat{\varphi}_{k,k_1,...,k_n}$ в пространстве квадратично суммируемых функций по q, распадаются в систему уравнений

$$\frac{\partial c_{k,k_1,...,k_n}}{\partial\tau} = \lambda_{k,k_1,...,k_n}\ c_{k,k_1,...,k_n}$$

для целых $k \neq 0, k_1 \geq 0, ..., k_n \geq 0.$.

Решения полученных уравнений имеют вид:

$$c_{k,k_1,\dots,k_n}(\tau,x,\xi)=c_{k,k_1,\dots,k_n}(0,x,\xi)\exp(\lambda_{k,k_1,\dots,k_n}\tau). \qquad (\Pi.10)$$

Так как $\lambda_{k,k_1,\dots,k_n}<0$, то отсюда следует, что $c_{k,k_1,\dots,k_n}$ экспоненциально убывают по времени диффузии τ, и основной вклад в функции $\hat{\varphi}_k(\tau,q,x,\xi)$ через некоторое время диффузии будут давать члены ряда (П.8) с наибольшим собственным значением.

Таким образом, с учетом равенств (П.8), (П.10), (П.7) получаем следующие асимптотические по времени $\tau\to\infty$ равенства:

$$\hat{\varphi}_k(\tau,q,x,\xi)\sim\frac{1}{\sqrt{2}}c_{k,0,\dots,0}(0,x,\xi)\hat{\varphi}_{k,0,\dots,0}(q,x)\exp\left(-\tau\sum_{i=1}^{n}\frac{2\pi|k|a_ib_i}{h}\right).$$

С учетом равенства (П.4) отсюда получаем, что каждое слагаемое φ_k при $k\neq 0$ в ряде (П.2), выражающем φ, экспоненциально убывает по τ. Следовательно, через некоторое время τ основной вклад в функцию будут давать члены ряда с наибольшим показателем, то есть при $k=\pm1$. Другими словами, мы имеем асимптотическое равенство $\varphi\sim\varphi_{-1}+\varphi_1$, подставив в которое последовательно равенства (П.4) при $k=\pm1$, асимптотические равенства для $\hat{\varphi}_{\pm1}$, полученные выше, и выражения (П.9) для $\hat{\varphi}_{\pm1,0,\dots,0}$, окончательно получим:

$$\begin{aligned}\varphi(\tau,q,p,\xi)\sim\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2}{h^3}\right)^{\frac{n}{4}}\left(\frac{b_1\dots b_n}{a_1\dots a_n}\right)^{\frac{1}{4}}\exp\left(-\tau\sum_{i=1}^{n}\frac{2\pi|k|a_ib_i}{h}\right)\times\\ \times\int_{R^n}\exp\left(-\frac{\pi}{h}\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{a_i}(q_i-x_i)^2\right)\times\\ \times\left(c_{-1,0,\dots,0}(0,x,\xi)\exp\left(-j\frac{2\pi k\langle p,x\rangle}{h}\right)+\right.\\ \left.+c_{1,0,\dots,0}(0,x,\xi)\exp\left(j\frac{2\pi k\langle p,x\rangle}{h}\right)\right)dx,\end{aligned} \qquad (\Pi.11)$$

где функции $c_{\pm1,0,\dots,0}(0,x,\xi)$ получаются последовательностью операций

$$\varphi(q,p,\xi)=\varphi(0,q,p,\xi)\mapsto\varphi_{\pm1}(q,p,\xi)\mapsto\hat{\varphi}_{\pm1}(q,p,\xi)\mapsto c_{\pm1,0,\dots,0}(0,x,\xi)$$

по формулам (П.2), (П.5), (П.9).

Легко проверить, что если φ — действительная функция, то функция $c_{1,0,\dots,0}(0,x,\xi) = c^*_{-1,0,\dots,0}(0,x,\xi)$ — комплексно сопряженная к функции $c_{-1,0,\dots,0}(0,x,\xi)$. Поэтому, обозначив через $\psi(x,\xi) = c_{-1,0,\dots,0}(0,x,\xi)$ и подставив это обозначение в (П.11), получим утверждение теоремы 3.

В этом разделе оценивается параметр a/b рассматриваемой в статье модели на основании метода, предложенного в [13] для обоснования величины сдвига Лэмба в спектре атома водорода.

Рассмотрим оператор $A_{f(q,p)}$, заданный выражением (9) для $f(q,p)$ — гамильтониана атома водорода, как возмущение квантово-механического оператора Гамильтона атома водорода. Из стандартной теории возмущений следует, что в первом приближении поправка δE_n к собственному значению E_n оператора Гамильтона имеет вид:

$$\delta E_n = \int_{R^3} \rho_n(y)(\bar{V}(y) - V(y))dy,$$

где $\rho_n(y) = |\psi_n(y)|^2$ и $\psi_n(y)$ — собственная функция оператора Гамильтона с собственным значением E_n, а $V(x) = -e^2/\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = -e^2/r$.

Функция $\bar{V}(x)$ по определению представляется в виде математического ожидания $\bar{V}(x) = M_q V(x+q)$, где величина q распределена с плотностью нормального распределения $(2b/(ha)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{2\pi b}{ha}(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)\right)$.

Перегруппировкой и заменой переменных в выражении для δE_n оно приводится к виду:

$$\delta E_n = \int_{R^3} (M_q(\rho_n(x+q)) - \rho_n(x))V(x)dx.$$

Так как $\rho_n(x)$ — гладкая функция и, если стандартное отклонение случайной величины q существенно меньше радиуса атома водорода, то для вычисления $M_q(\rho_n(x+q))$ можно воспользоваться разложением функции $\rho_n(x+q)$ в ряд Тейлора до второго члена по q.

Имеем

$$\rho_n(x+q) \approx (1 + \langle q, \nabla\rangle + \frac{1}{2}\langle q, \nabla\rangle^2 \rho_n(x).$$

Отсюда, с учетом равенств $M_q(q_i) = 0$, $M_q(q_i q_j) = 0$, при $i \neq j$, и $M_q(q_i^2) = ha/(4\pi b)$, получим приближенное равенство:

$$M_q(\rho_n(x+q)) = \rho_n(x) + \frac{ha}{8\pi b}\Delta\rho_n(x),$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{x_1^2} + \frac{\partial^2}{x_2^2} + \frac{\partial^2}{x_3^2}$ — оператор Лапласа.

Подставив полученное выражение $M_q(\rho_n(x+q))$ в последнее выражение для δE_n и, учитывая, что оператор Лапласа — самосопряженный оператор, получим:

$$\delta E_n = -\frac{ah}{8\pi b}\int_{R^3}\rho_n(y)\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial^2 V(y)}{\partial y_k^2}dy.$$

Так как оператор Лапласа от функции $V(y) = -e^2/r$ равен $4\pi e^2\delta_0(y)$, где $4\pi e^2\delta_0(y)$ — дельта функция в нуле, то отсюда следует, что

$$\delta E_n = -\frac{a\hbar\pi e^2}{b}\rho_n(0).$$

Для атома водорода известно (см., например [14], стр. 342), что

$$\rho_n(0) = |\psi_n(0)|^2 = \frac{1}{\pi n^3}\left(\frac{me^2}{\hbar^2}\right)^3,$$

где $\hbar = h/(2\pi)$. Поэтому

$$\delta E_n = -\frac{a\hbar\pi e^2}{b}\frac{1}{\pi n^3}\left(\frac{me^2}{\hbar^2}\right)^3 = -\frac{a}{b}\frac{m^3e^8}{n^3\hbar^5} = -\frac{a}{b}\frac{m^3\alpha^4c^4}{n^3\hbar},$$

где $\alpha = e^2/(\hbar c) = 1/137$ – постоянная тонкой структуры, c – скорость света. Отсюда, a/b выражается следующим образом:

$$\frac{a}{b} = \delta E_n\frac{n^3\hbar}{m^3\alpha^4c^4}.$$

В экспериментах Лэмба и Резерфорда для атома водорода было установлено, что $\delta E_2 = 1058$МГц $= 1058\cdot 10^6 h$ эрг. Сравнивая это значение с полученным выражением δE_2, простыми вычислениями получим оценку величины $a/b = 3,41\cdot 10^4$сек/г. Отсюда стандартное отклонение для плотности нормального распределения вероятностей $\chi_1^2(x')$, по которому производится сглаживание потенциала V, равно $\sqrt{a\hbar/2b} = 4,24\cdot 10^{-12}$см. Эта величина существенно меньше радиуса атома водорода.

Литература

1. Kostant B. Quantization and unitary representations. //Lectur notes in mathematics. V.170. Berlin: Springer - Verlag, 1970. P.87-208. Souriau J.-M. Structure des systemes dynamiques. Maitrises de mathematiques. Paris: Dunod,1970. Гийемин В., Стернберг С. Геометрические асимптотики. М.: Мир, 1981.

2. Lamb W.E., Retherford R.C. // Phys. Rev. 1947. V.72. N2. P.241-243.

3. Neumann J. Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik. Berlin: Springer - Verlag, 1932 (Имеется русский перевод:Нейман Д. Математические основы квантовой механики. М.: Наука, 1964.)

4. Bohm D. // Phys. Rev. 1952. V.85. N2. P. 166 - 180. de Broglio L. La Physique Quantique restera-t-elle indeterministe. Paris,1953. Вопросы причинности в квантовой механике.М.:И.Л.,1955.

5. Bohm D., Vigier J.P. //Phys. Rev. 1954. V.96. P.208; 1958. V.109. P.882. Nelson E. // Phys. Rev. 1966. V.150. N4. P.1079 - 1085. De la Penc - Auerbach L., Getto A.M. //Jorn. of Math. Phys. 1977. V.18. N8. P.1612-1622. Маслов В.П. Уравнения Колмогорова - Феллера и вероятностная модель квантовой механики. // Итоги науки и техники. Теор. вер., мат. стат. и кибернет. 1982. Т.19. С. 55 - 85. Baublitz M. //Progress of Theor. Physic. 1988. V.80. N2. P.232. Kaloyerou P.N., Vigier J.P. //Phys. Lett. 1988. V. A130. P.260.

6. Fenyes I. // Zs. f. Phys. 1952. V.132. P.81. (Имеется перевод: Феньеш И.//Вопросы причинности в квантовой механике. М.: И.Л., 1955.).

7. Холево А.С. Статистическая структура квантовой механики и скрытые параметры. М.:Знание, сер. " Математ., кибернет.",1985.N6.

8. Спасский Б.И., Московский А.В. //УФН. 1984. Т.142. N4. Гриб А.А. //УФН. 1984. Т.142. N4.

9. Wigner E. //Phys. Rev. 1932. V.40. P.749-759.

10. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. М.: Наука, 1979.

11. Исихара А. Статистическая физика. М.: Мир, 1973.

12. Фаддеев Л.Д., Якубовский О.А. Лекции по квантовой механике. Л.: Изд-во ЛГУ, 1980.

13. Welton Th. // Phys. Rev. 1948. V.74. P.1157.

14. Соколов А.А., Тернов И.М., Жуковский В.Ч. Квантовая механика. М.: Наука, 1979.